ДО РОЗРАХУНКУ ТОНКИХ ОРТОТРОПНИХ ОБОЛОНОК ЗМІННОЇ ТОВЩИНИ З НЕЛІНІЙНО ПРУЖНИХ КОМПОЗИТНИХ МАТЕРІАЛІВ

В. А. Максимюк[1], Є. А. Сторожук[1], В. С. Тарасюк[2], І. С. Чернишенко[1]

[1]*Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна*

desc@inmech.kiev.ua

[2]*Національний авіаційний університет, Київ, Україна*

Тонкі та змінної товщини композитні елементи конструкцій у вигляді пластинок і оболонок різноманітної форми знаходять широке застосування в машинобудуванні, промисловому та громадському будівництві, авіаційній та космічній техніці, суднобудуванні. Оболонки можуть мати вирізи, підкріплені отвори, жорсткі включення. Навколо таких структурних неоднорідностей виникають підвищені градієнти напружено-деформованого стану (НДС). Композитні матеріали (КМ) можуть бути ортотропними, шаруватими, нелінійно-пружними [1]. Необхідність врахування реальних властивостей КМ вимагає притягнення адекватних теоретичних уявлень.

1. *Постановка нелінійних задач.* Тонку композитну оболонку з підкріпленнями у вигляді ребер, кілець, накладок або з ділянками потовщень чи потоншень будемо розглядати як оболонку змінної товщини. Поверхні такої оболонки можуть бути кусково-гладкими. Виберемо між ними деяку уявну гладку поверхню, як поверхню приведення в теорії оболонок

$$X = X\left(\alpha_1, \alpha_2\right) \quad (X \to Y, Z)$$

де X, Y, Z — координати точок поверхні в глобальній декартовій системі координат (x, y, z).

Відстані вздовж координати α_3 від поверхні приведення до зовнішніх поверхонь оболонки позначимо $h_1\left(\alpha_1, \alpha_2\right)$ і $h_2\left(\alpha_1, \alpha_2\right)$. Тоді $-h_1 \le \alpha_3 \le h_2$, а товщина оболонки буде

$$h\left(\alpha_1, \alpha_2\right) = h_1\left(\alpha_1, \alpha_2\right) + h_2\left(\alpha_1, \alpha_2\right).$$

Вважатимемо, що тонка оболонка виготовлена з нелінійно пружного ортотропного КМ, властивості якого не змінюються в часі. Процес навантаження під дією поверхневих та крайових сил відбувається за постійної температури і є активним та простим. Осі ортотропії КМ збігаються з лініями головних кривин поверхні приведення оболонки.

За певних величин діючих навантажень в оболонці проявляються нелінійні властивості анізотропного матеріалу, а деформації є малими. Зазначені передумови дозволяють для одержання основних рівнянь скористатися геометрично лінійною теорією оболонок і теорією пластичності анізотропних середовищ [2], враховуючи змінну товщину оболонки.

2. *Основні співвідношення та методичні аспекти розв'язування задач.* Компоненти U_1, U_2, U_3 вектора переміщень довільної точки оболонки виража-

ються [1] через переміщення u_1, u_2, u_3 точок її поверхні приведення та кути повороту нормалі φ_1, φ_2 формулами

$$U_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = u_1(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 \phi_1(\alpha_1, \alpha_2);$$
$$U_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = u_2(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 \phi_2(\alpha_1, \alpha_2);$$
$$U_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = u_3(\alpha_1, \alpha_2).$$

Орієнтуючись на застосування в подальшому методу множників Лагранжа для реалізації [3] геометричних гіпотез Кірхгофа — Лява, не будемо виражати аналітично кути повороту дотичних через переміщення. Тоді кути φ_1, φ_2 визначаються [1] з умов рівності нулеві деформацій поперечного зсуву

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0.$$

Такий підхід сприяє підвищенню алгоритмічності та надійності створюваних програм для обчислювальних машин.

Фізичні нелінійні залежності між компонентами напружень і деформацій при плоскому напруженому стані для простих навантажень приймемо згідно з теорією пластичності анізотропних середовищ Ломакіна [2]. Рівняння цієї теорії є суттєво нелінійними, розв'язати їх відносно напружень можна чисельно за допомогою, наприклад, методу Ньютона. Тоді після чисельного обернення [1] їх можна подати у вигляді

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(e_{11}, e_{22}, e_{12}) \quad (i, j = 1, 2).$$

Орієнтуючись на застосування в подальшому методу послідовних наближень, виділимо в напруженнях, як доданки, нелінійні

$$\sigma^*_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma^0_{ij} \quad (i, j = 1, 2) \qquad (1)$$

та лінійні члени

$$\sigma^0_{11} = c_{11} e_{11} + c_{12} e_{22} \ (1 \leftrightarrow 2); \ \sigma^0_{12} = G_{12} e_{12},$$

де

$$c_{11} = \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; \ c_{12} = c_{21} = \frac{E_{11}\nu_{12}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; \ c_{22} = \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}.$$

Введемо середні по товщині оболонки внутрішні зусилля та моменти

$$T_{ij} = \int_{-h_1}^{h_2} \sigma_{ij} d\alpha_3; \quad M_{ij} = \int_{-h_1}^{h_2} \sigma_{ij} \alpha_3 d\alpha_3 \quad (i, j = 1, 2).$$

Подамо їх відповідно до (1) у вигляді суми лінійних та нелінійних доданків

$$T_{ij} = T^0_{ij} + T^*_{ij}; \ M_{ij} = M^0_{ij} + M^*_{ij} \quad (i, j = 1, 2).$$

Лінійні члени, позначені верхніми символами ^{0}, визначаються за формулами:

$$T^0_{11} = (c_{11}\varepsilon_{11} + c_{12}\varepsilon_{22}) h + (c_{11}\kappa_{11} + c_{12}\kappa_{22}) \left(h_2^2 - h_1^2\right) / 2;$$

$$T_{22}^{0} = \left(c_{22}\varepsilon_{22} + c_{21}\varepsilon_{11}\right)h + \left(c_{22}\kappa_{22} + c_{21}\kappa_{11}\right)\left(h_2^2 - h_1^2\right)\big/2\ ;$$
$$T_{12}^{0} = G_{12}\varepsilon_{12}h + G_{12}\kappa_{12}\left(h_2^2 - h_1^2\right);$$
$$M_{11}^{0} = \left(c_{11}\varepsilon_{11} + c_{12}\varepsilon_{22}\right)\left(h_2^2 - h_1^2\right)\big/2 + \left(c_{11}\kappa_{11} + c_{12}\kappa_{22}\right)\left(h_2^3 + h_1^3\right)\big/3\ ;$$
$$M_{22}^{0} = \left(c_{22}\varepsilon_{22} + c_{21}\varepsilon_{11}\right)\left(h_2^2 - h_1^2\right)\big/2 + \left(c_{22}\kappa_{22} + c_{21}\kappa_{11}\right)\left(h_2^3 + h_1^3\right)\big/3;$$
$$M_{12}^{0} = G_{12}\varepsilon_{12}\left(h_2^2 - h_1^2\right)\big/2 + 2G_{12}\kappa_{12}\left(h_2^3 + h_1^3\right)\big/3. \qquad (2)$$

Нелінійні члени у (2.15), позначені верхніми символами *, будуть обчислюватися за формулами

$$T_{ij}^{*} = \int_{-h_1}^{h_2} \sigma_{ij}^{*} d\alpha_3\,; \quad M_{ij}^{*} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij}^{*\prime} \alpha_3 d\alpha_3\ \left(i,j = 1,2\right). \qquad (3)$$

З використанням формул (2,3) була модифікована розроблена раніше [1] методика дослідження нелінійного НДС оболонок з підкріпленими отворами або змінної товщини, виготовлених з нелінійно-пружних КМ. Використано метод послідовних наближень, варіаційно-різницевий метод (ВРМ). Проведено чисельний аналіз НДС тонких сферичних оболонок з нелінійно-пружних КМ. Досліджено вплив нелінійних властивостей КМ на НДС оболонок.

Результати розрахунків для випадків сталої та змінної товщини з точністю до двох значущих цифр збігаються з аналогічними результатами, отриманими методом скінченних різниць (МСР) [4], що свідчить про ефективність розробленого методу. Більше того, МСР не дозволяє розраховувати оболонки кусковосталої товщини через необхідність обчислення першої і другої похідних від товщини, а ВРМ є вільним від такого недоліку і в запропонованому варіанті дозволяє розраховувати оболонки з довільним законом зміни товщини, включаючи, навіть, оболонки з ребрами.

Аналогічний підхід був застосований для дослідження методом скінченних елементів нелінійного деформування гнучких композитних оболонок з підкріпленими криволінійними отворами [5].

Список літератури

1. Maksimyuk V. A., Storozhuk E. A., Chernyshenko I. S. Variational finite-difference methods in linear and nonlinear problems of the deformation of metallic and composite shells (review) // Int. Appl. Mech. — 2012. — **48**, No. 6. — P. 613–687.

2. Ломакин В. А. О теории пластичности анизотропных сред // Вестн. Моск. ун-та. Математика и механика. — 1964. — № 4. — С.49–53.

3. Максимюк В. А. Про застосування методу множників Лагранжа в задачах статики композитних оболонок // Доп. НАН України. — 1998. — No. 11. — С. 75–79.

4. Максимюк В. А., Чернышенко И. С. Физически нелинейные осесимметричные задачи теории ортотропных оболочек переменной толщины // Прикл. механика. — 1987. — 23, № 1. — С. 44–48.

5. Maksimyuk V. A., Storozhuk E. A., Chernyshenko I. S. Stress State of Flexible Composite Shells with Stiff-ened Holes // Int. Appl. Mech. — 2014. — 50, No. 5. — P.558–565.