Лекция 5: Статистична динаміка великих системи зі змінною структурою. Рівняння для щільностей імовірностей та моментів розподілів.

1. .

1. Статистична динаміка великих системи зі змінною структурою
2. Рівняння для щільностей імовірностей
3. Моменти розподілів

У лекції розглядається підхід до вирішення завдання теоретико-імовірнісного аналізу великих систем із змінною структурою, тобто систем, для яких характерне стрибкоподібне зміна окремих параметрів або структури в цілому. Розглядається використання спектральної форми математичного опису систем.

Розвиток сучасного виробництва і підвищення його ефективності засноване на різке поліпшення якості автоматичних систем, що використовуються для управління технологічними процесами і технічними пристроями. Автоматизація складних процесів управління в сучасній техніці призводить до необхідності використання систем із змінною структурою. Системи зі змінною структурою (мультиструктурою) мають кілька детермінованих станів (структур), переходи в які є випадковими, залежними від часу і від деяких поточних фазових координат процесу. Структура і конструкція таких систем різноманітні. Система зі змінною структурою може складатися з окремих детермінованих підсистем , послідовно або паралельно включаються в роботу. Основний спільною особливістю є різка зміна деяких параметрів або структури в цілому за випадковим законом. При застосуванні зазначених систем вдається автоматизувати процеси перемикання різних алгоритмів керування, забезпечити максимально точне управління при різних умовах функціонування пристроїв та за наявності випадкових порушень.

Основою розглянутих автоматичних систем із змінною структурою є детерміновані структури. Але включення різних структур відбувається у випадкові моменти часу, що залежать від випадкового характеру процесу управління, що протікає в системі. Крім того, весь процес функціонування складної системи слід розглядати в умовах дії перешкод і при випадкових зовнішніх керуючих сигналах. Більш складний і досконалий клас систем із змінною структурою може бути побудований на базі довільної стохастичною структури зі спеціальною логікою її зміни по адаптивним алгоритмам. Це клас найбільш складних кібернетичних систем, що володіють випадкової змінною структурою. До таких систем відносяться автоматичні пристрої, що мають кілька детермінованих станів, переходи в які описуються випадковими процесами, системи пошуку та захоплення сигналу, системи з можливими порушеннями і системи з перебудованим законом управління. По суті всі перераховані системи мають випадкову структуру, і це призводить до необхідності застосування теоретико - імовірнісного підходу при розгляді їх динаміки.

Завдання теоретико - імовірнісного аналізу та синтезу таких систем в даний час є актуальними і ще недостатньо вивченими. Так, більш докладно розглянуті завдання зриву стеження, часні задачі аналізу систем з можливими порушеннями і завдання з випадковими параметрами. Розвинені наближені методи аналізу часного виду систем із змінною структурою. У журнальних статтях розглянуті деякі більш загальні завдання фільтрації вимірювань сигналу, корисна частина якого описується рівняннями змінної структури, а також синтезу управлінь. Єдиний метод статистичного дослідження зазначених систем із змінною (випадкової) структурою вдається розвинути на основі розгляду динаміки системи в просторі станів і використання теорії випадкових марківських процесів з поглинанням реалізацій.

Із застосуванням такого методу вирішуються завдання визначення ймовірності перебування системи в кожному стані, оцінки ймовірності розподілу фазових координат, моментів і точності функціонування при дії перешкод. Вони є частиною загальної задачі нелінійної фільтрації та визначення оптимальних управлінь, тобто структури оптимального регулятора в системах зі змінною структурою. Коло завдань, що відносяться до статистичної динаміці систем із змінною структурою, досить широкий і охоплює задачі ідентифікації, параметричної оптимізації та інші, вирішення яких базується на викладених методах або вимагає деякого розширення понять. Тому дану лекцію слід розглядати як введення в проблематику теоретико - імовірнісного дослідження зазначених систем.

Як приклад розглянемо систему захисту комп'ютерної мережі як систему зі змінною структурою. Реальні динамічні системи, і, зокрема, системи управління мережевою безпекою мають випадково змінюються елементи, а процеси в них визначаються рівняннями з випадковими параметрами. Випадкові зміни параметрів є повільними в порівнянні з часами процесів управління , що протікають в системі. Отже, ці зміни розглядаються не як статичні нелінійності, а як малі параметри обурення. На малому інтервалі спостереження зміни параметрів також малі і з прийнятною для практики точністю апроксимуються лінійними функціями. Відповідні системи класифікуються як лінійні параметричні. Практично при аналізі таких систем слід враховувати випадкові зміни параметрів в ансамблі однотипних систем . Структура рівнянь, якими описується їх стан , однакова для всіх систем , а параметри систем розглядаються як випадкові величини, а не як випадкові функції. Стосовно до завдання конфлікту системи захисту мережі та атакуючого противника один зі станів відповідає повної відмови системи, а інші - функціонуванню з різним ступенем ефективності. Перенумерувати всі структури в можливій послідовності від найбільш ефективного стану до стану відмови, отримаємо кінцеве число N можливих структур. Перехід системи з одного стану в будь-яке інше характеризується відповідними ймовірностями. Можна показати , що цей процес є марковским з кінцевим числом станів. Перехідні імовірності не залежать від поведінки системи до моменту часу і визначаються тільки ймовірністю стану системи і тривалістю інтервалу - величини другого порядку малості.

У мультиструктурній системі з матричними функціями поглинання і відновлення реалізацій $\mathbf{v}(t)$ типу стохастичних матриць ймовірності стану $p_i(t)$ визначаються з рівняння типу рівнянь Колмогорова. Для розглянутого випадку система рівнянь має наступний вигляд:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dp_0(t)}{dt} = -rp_0(t) + (1-r)\,p_0(t) + r_{1-\varepsilon}p_{1-\varepsilon}(t),\\
&\frac{dp_{1-\varepsilon}(t)}{dt} = -r_{1-\varepsilon}p_{1-\varepsilon}(t) - r_{2\varepsilon}p_{1-\varepsilon}(t) + rp_0(t) + q_{2\varepsilon}p_{1+\varepsilon}(t),\\
&\frac{dp_{1+\varepsilon}(t)}{dt} = -q_{2\varepsilon}p_{1+\varepsilon}(t) - qp_{1+\varepsilon}(t) + r_{2\varepsilon}p_{1-\varepsilon}(t) + q_{1+\varepsilon}p_2(t),\\
&\frac{dp_2(t)}{dt} = -qp_2(t) + (1-q)\,p_2(t) + q_{1+\varepsilon}p_{1+\varepsilon}(t).
\end{aligned}\right\}$$

незалежно від рішення рівнянь для вихідних змінних стану. Ці функції визначаються з рівнянь

$$p_l'(t) = p_l(t)\sum_{r=1}^{N}\nu_{lr}(t) + \sum_{r=1}^{N}p_r(t)\nu_{rl}(t), \quad p_l(t_0) = p_{l0}, \quad l = \overline{1,N}$$

Ймовірності стану системи визначаються тільки матрицями потоків поглинання та відновлення $\mathbf{v}(t)$, що не залежить від станів системи. Якщо все інтенсивності переходів на інтервалі спостереження постійні ($\nu_{lr} = \text{const},\ \nu_{rl} = \text{const}$), то рішення рівнянь (2) є дозвіл повної проблеми власних значень. Воно повністю визначається початковими умовами і корінням характеристичного рівняння

$$\begin{pmatrix}
\lambda_1 + \sum_{r=1}^{N}\nu_{1r} & -\nu_{21} & \cdots & -\nu_{N1}\\
-\nu_{12} & \lambda_2 + \sum_{r=1}^{N}\nu_{2r} & \cdots & -\nu_{N2}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
-\nu_{1N} & -\nu_{2N} & \cdots & \lambda_N + \sum_{r=1}^{N}\nu_{Nr}
\end{pmatrix} = 0$$

Для нестаціонарного випадку ($\nu_{lr}(t) = \text{var},\ \nu_{rl}(t) = \text{var}$) матриця в правій частині рівняння (3) є несиметричною. Однак і в цьому випадку чисельне рішення рівняння (3) не представляє нездоланних труднощів. Існують добре розроблені методи обчислення власних значень і власних векторів несиметричною матриці шляхом приведення її до верхньої майже трикутної формі Гессенберга і застосування методів LR- або QR - ітерацій. У зв'язку з нагнітанням обчислювальних потужностей в мережеве комутаційне обладнання таке завдання може вирішуватися в реальному масштабі часу навіть на прикордонних вузлах мережевого периметра. Як випливає з рівняння (2) , система захисту як об'єкт управління описується рівнянням N-го порядку. З теорії систем зі змінною структурою випливає, що система є повністю керованою , якщо для об'єкта управління, описуваного рівнянням N-го порядку застосовується управляючий пристрій $N-1$ з ланкою змінної структури.

Схема системи захисту із змінною структурою управлінь об'єктом N-го порядку зображена на рис. 1. Тут $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{N-1}$ - елементарні нелінійні ланки змінної структури (ψ-коміркипо термінології).

Типова функціональна схема ψ-коміркизображена на рис. 2. Ланки управління являють собою перемикачі на ту чи іншу структуру, найбільш ефективну в поточний момент. Перемикання здійснюється при зміні знака керуючого сигналу за допомогою ψ - комірок. Рівняння, якими описується робота системи, мають вигляд

$$\left.\begin{aligned} &R(p)Y = -k[U+X] + R(p)f;\\ &U = \sum_{j=1}^{N-1} u_j,\ u_j = \frac{1}{2}\left[s_{21}^{(j)}Y_j + s_{12}^{(j)}\left|Y_j\right|\operatorname{sgn} g\right];\\ &Y_j = p^{j-1}Y,\ g = Q(p)Y,\end{aligned}\right\}$$

де, $R(p) = \sum_{j=0}^{N} a_j p^j$, $Q(p) = \sum_{j=1}^{N} c_j p^{j-1}$, $s_{21}^{(j)} = l_{1j} + l_{2j}$, $s_{12}^{(j)} = l_{1j} - l_{2j}$

$X(t)$ випадкова перешкода з параметрами, в загальному випадку залежними від часу: $m_x(t)$ середнім значенням і спектральної щільністю $s_x(\omega, t)$; $f(t)$– Детермінована функція управління; p - оператор Лапласа.

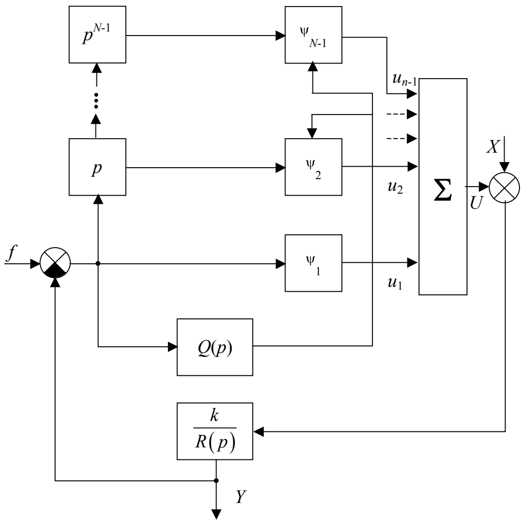


Рис. 1 Система захисту с $N-1$ звеном переменной структуры управления

Рівняння ψ-комірки мають наступний вигляд:

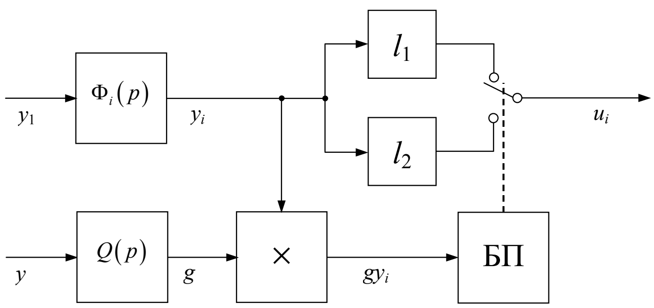
$$u_j = \begin{cases} l_1 y_j, & y_j g > 0;\\ l_2 y_j, & y_j g < 0,\end{cases}$$

где $y_i = \Phi(p) y_1$ – сигнали, що перемикаються;

l_1, l_2 – коефіцієнти передачі, що перемикають ланцюги управління;

$g = Q(p)y$ – сигнал переключения;

$\Phi_i(p), Q(p)$ – Оператори формування сигналів y_i, g відповідно. соответственно.



Нелінійність ψ - коміркиє суттєвою і являє собою нелінійність мультиплікативного релейного типу, що описується рівнянням виду

$$\varphi(Y_1, Y_2) = |Y_1| \operatorname{sgn} Y_2. \qquad (6)$$

Сигнал перемикання може формуватися різними способами залежно від виду системи. Загальне рівняння гіперплощини перемикання має вигляд

$$\sum_{i=1}^{N} c_i y_i = 0, \qquad (7)$$

де $c_i = \text{const}$ – кутовий коефіцієнт перемикання.

Залежно від вибору величини кутового коефіцієнта перемикання регулювання системи може здійснюватися в різних режимах:

$c_i = -\lambda_i$ – режим руху по виродженим траєкторіях;

$c_i > -\lambda_i$ – режим перемикань;

$c_i < -\lambda_i$ – ковзний режим.

Нагадаємо, що - власні значення характеристичного рівняння (3).Не вдаючись у подробиці порівняльного аналізу режимів в системах із змінною структурою , відзначимо , що в ковзному режимі перемикання зі структури в структуру відбувається теоретично з нескінченно високою частотою, і, що особливо важливо, параметри регулювання не залежать від параметрів незмінної частини системи. Тому можна наділяти систему бажаними властивостями (за швидкістю регулювання, якості перехідного процесу і т.д.). У дискретних системах частота перемикання, очевидно, дорівнює тактовій частоті синхронізучого генератора. Система, описувана рівняннями (4), має теоретично структур, відмінності між якими полягає тільки в різних рівняннях управлінь. Тому її можна розглядати як систему з моноструктури і складним нелінійним керуючим пристроєм. Параметри нелінійних ланок (ψ -комірок) вибираються з умови виникнення ковзаючого режиму руху без перешкод зображає точки на гіперплощини перемикання, описуваної рівнянням (7).

Для отримання асимптотичних оцінок ефективності системи управління захистом мережі доцільно використовувати метод гауссової апроксимації функції розподілу координат у просторі станів. Правомірність такого підходу, як зазначалося вище, обумовлюється нормалізацією процесів, що протікають в складних системах. Тоді можна застосовувати статистичну линеаризацию нелінійностей, яка полягає в наступному.

Передбачається, що в малої ε - наближені зображає точки розподіл ймовірності фазових координат можна апроксимувати гаусовим розподілом. Тоді, розклавши вектор стану (фазових координат) Y, в ряд Тейлора з утриманням перших двох членів, досить скласти рівняння для вектора математичних очікувань і кореляційної матриці фазових координат системи.

Для розглянутого випадку в першому рівнянні системи (4) вектор Y системи захисту замінюється його математичним очікуванням m_1, обчисленим шляхом статистичного усереднення в ε- наближені, а елементи векторів u і X - добутками їх математичних очікувань на відповідні елементи кореляційної матриці:

$$\left.\begin{aligned} & R(p)m_1 = -\frac{k}{2}\sum_{j=1}^{n-1}\left[s_{21}^{(i)}m_j + s_{22}^{(j)}\varphi_{0j}\right] + R(p)f; \\ & m_g = Q(p)m_1, \quad m_j = p^{j-1}m_1, \end{aligned}\right\}$$

де φ_{0j} – коефіцієнти розкладання векторів Y_{0j}, що описуються рівнянням (6), у вигляді лінеаризованої залежності $\varphi_j\left(Y_1, Y_2\right) = \varphi_{0j} + k_1 Y_{01} + k_2 Y_{02}$; коефіцієнти k_1 и k_2 вибираються, виходячи з умови нормування по змінним стану системи.