

## ОБРОБКА СИГНАЛІВ З ВИСОКОЧАСТОТНОЮ ЗАВАДОЮ НА ОСНОВІ ЧАСТКОВИХ ВИПАДКІВ КОМБІНАЦІЙ $B$ -СПЛАЙНІВ

Для обробки цифрових сигналів спотворених впливом високочастотної гаусової завади пропонується підхід на основі часткових випадків лінійних комбінацій  $B$ -сплайнів, близьких до інтерполяційних у середньому. В основу обчислювальних процедур покладено оператори низькочастотної фільтрації, масштабування та процедур *subdivision*.

**Постановка проблеми.** Однією із головних задач цифрової обробки сигналів є визначення істинних параметрів сигналу, спотвореного дією завади або середовища, через яке сигнал передається. За більше, ніж п'ятдесятирічну історію розвитку теорії обробки сигналів запропоновано та успішно використовуються десятки методів виділення зашумленого сигналу, проте, останнім часом привабливість у дослідників отримали методи вейвлет-аналізу. Обумовлено це, насамперед, обчислювальною простотою обробки на основі вейвлет-технологій. До не багатьох недоліків вейвлетів відносять те, що не завжди вони представлені у аналітичному вигляді, що, певною мірою, обмежує їх дослідження.

Варто відзначити, що існують вейвлети, отримані за використанням часткових випадків неперервних апроксимацій, зокрема, лінійних комбінацій  $B$ -сплайнів. Такі вейвлети (або лінійні оператори з властивостями, близькими до властивостей вейвлетів) добре відомі та мають широке застосування в практиці обробки сигналів [1; 2]. Однак, певний інтерес можуть являти дослідження властивостей часткових випадків лінійних комбінацій  $B$ -сплайнів порядку вище четвертого, близьких до інтерполяційних у середньому, причому як при низькочастотній фільтрації, так і для отримання обчислювальних процедур масштабування.

**Аналіз публікацій та постановка задачі.** Нехай  $p(t) \in L_2(\mathbb{R})$  – аналоговий сигнал з кінцевою енергією, що визначається його нормою  $\|p(t)\|_{L_2} = \langle p(t), p(t) \rangle^{1/2}$ , заданий дискретно  $\{p_i\} \in l_2(\mathbb{Z})$  (цифровий

сигнал) відліками на рівномірному розбитті  $\Delta_h : t_i = ih, i \in \mathbb{Z}$ . Будемо вважати, що при фіксації аналогового сигналу має місце наступне. Нехай  $\phi(t)$  – функція імпульсного відклику системи, що реєструє сигнал  $p(t)$ , при цьому результатом згортки сигналу та функції відклику буде значення, усереднене на інтервалі дискретизації, зокрема:

$$(p * \phi)(ih) = \frac{1}{h} \int_{ih-\frac{h}{2}}^{ih+\frac{h}{2}} p(t)\phi(t-ih)dt = \bar{p}_i.$$

Тоді цифровий сигнал може мати таке подання:

$$p_i = \bar{p}_i + \varepsilon_i, i \in \mathbb{Z}, \quad (1)$$

де  $\varepsilon_i$  – випадкова вада довільного розподілу, проте за замовченням вважаємо для неї розподіл Гауса з дисперсією  $\sigma_\varepsilon^2$  та функцією щільності

$$f(\varepsilon; 0, \sigma_\varepsilon) = \frac{1}{\sigma_\varepsilon \sqrt{2\pi}} e^{-\varepsilon^2/2\sigma_\varepsilon^2}. \quad (2)$$

Поставимо за мету при побудові моделі сигналу  $p(t)$  використовувати апроксимації, що враховують випадкову природу даних, наприклад, оператори близькі до інтерполяційних у середньому, зокрема, поліноміальні сплайни на основі  $B$ -сплайнів

Нехай на розбитті  $\Delta_h$  задано  $B$ -сплайн нульового порядку:

$$B_{0,h}(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [-h/2; h/2], \\ 1, & t \in [-h/2; h/2]. \end{cases}$$

Тоді  $B$ -сплайн  $B_{r,h}(t)$  порядку  $r$  ( $r \geq 1$ ) визначається рекурентно так:

$$B_{r,h}(t) = \frac{1}{h} \int_{t-h/2}^{t+h/2} B_{r-1,h}(\tau) d\tau.$$

Наприклад, при  $r = 2$   $B$ -сплайн другого порядку визначається так [3]:

$$B_{2,h}(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [-3h/2; 3h/2], \\ (3+2t/h)^2/8, & t \in [-3h/2; -h/2], \\ 3/4 - (2t/h)^2/4, & t \in [-h/2; h/2], \\ (3-2t/h)^2/8, & t \in [h/2; 3h/2]. \end{cases} \quad (3)$$

В роботі [4, стор.102] доведено, що як і гаусіан,  $B$ -сплайн порядку вище першого може бути використаний для визначення коротковіконного перетворення Фур'є (КВПФ). Отже, для  $B_r(t)$ ,  $r \geq 2$  має місце [1]:

$$\hat{B}_r(\omega) = \left( \frac{e^{i\omega/2} - e^{-i\omega/2}}{i\omega} \right)^{r+1} = \left( \frac{\sin(\omega/2)}{(\omega/2)} \right)^{r+1}, \text{ при } h = 1. \quad (4)$$

З аналізу графіку (рис.1), отриманого на основі виразу (4), виходить що вже починаючи з порядку  $r = 5$  і  $B$ -сплайн, і Гаусіан фактично мало чим відрізняються (рис.2), при цьому обрахунок  $B$ -сплайну потребує менше обчислювальних затрат. Проте КВПФ у повній мірі не знімає «обмежень» на обробку сигналів. Згідно принципу невизначеності Гейзенберга неможливо отримати одночасно високе частотне та часове розрішення.

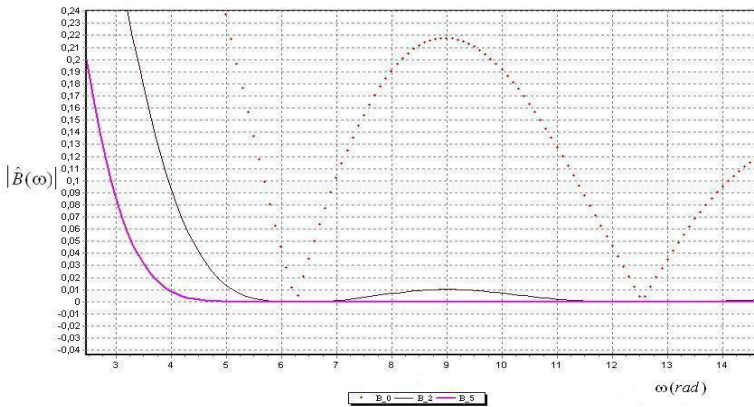


Рис.1. Частотні характеристики  $B$ -сплайнів нульового, другого та п'ятого порядків.

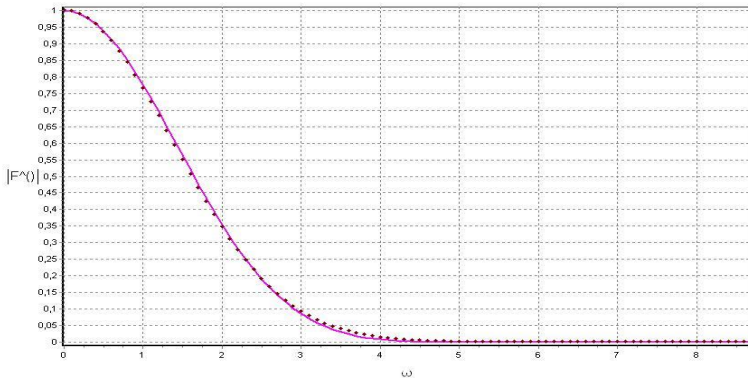


Рис.2.  $B$ -сплайн п'ятого порядку (сполошна лінія) та гаусіан (крапки) з  $\sigma_{\varepsilon} = 0,725$

Таку невизначеність можна подолати за використанням інтегрального вейвлет-перетворення [1; 4; 5], що значно узагальнює (інтегральне) перетворення Фур'є. Останнє забезпечують властивості вейвлетів, а саме: зсув та масштабуємість. Відмітимо, що  $B$ -сплайни задовольняють вказаним властивостям і є вейвлет-функціями масштабування [4]. З іншого боку, згідно теореми Вєрштрасса, будь-яка неперервна на відрізку функція може бути наближена послідовністю багаточленів (поліномом), що сходиться рівномірно до цієї функції на відрізку. Як відомо,  $B$ -сплайни утворюють базис в просторі поліномів [6; 7], отже будь-яка неперервна функція, (а отже і неперервний сигнал  $p(t)$ ) може мати наближення у вигляді лінійної комбінації  $B$ -сплайнів. Зокрема, якщо обрати в якості апроксимації сигналу  $p(t)$  комбінацію  $B$ -сплайнів такого типу:

$$S_{r,0}(p,t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} p_i B_{r,h}(t - ih), \quad r \geq 2, \quad (5)$$

то отримаємо модель з властивостями імпульсного нерекурсивного низькочастотного фільтру. По-суті, вираз (5) є неперервним оператором низькочастотної фільтрації, для якого притаманні ряд корисних при відтворенні сигналів властивостей: висока обчислювальна ефективність при поданні моделі (5) у розгорнутому вигляді з урахуванням явного виразу  $B$ -сплайну на зразок (3); властивості в частотній області, близькі до властивостей фільтру Гауса; локальність (фактично КВПФ); масштабуємість; є ланкою для побудови інтегрального вейвлет-перетворення.

Отже, поставимо за мету в даній роботі на основі виразу (5) подати приклади обчислювальних схем для забезпечення низькочастотної фільтрації цифрових сигналів за даними типу (1).

**Виклад основного матеріалу.** За потреби в отриманні цифрового низькочастотного фільтру достатньо в моделі (5) визначити значення сплайну у вузлах розбиття  $\Delta_h$  [8]. Для  $r=2$  можемо записати  $S_{2,0}(p,t)$  у розгорнутому вигляді так [11]:

$$S_{2,0}(p,t) = \frac{1}{8} \left( (1-x)^2 p_{i-1} + (6-2x^2) p_i + (1+x)^2 p_{i+1} \right),$$

де  $x = 2(t - (i+0,5)h)/h$ ,  $|x| \leq 1$ . Якщо покласти  $x=0$  отримаємо:

$$S_{2,0}(p,ih) = (p_{i-1} + 6 \cdot p_i + p_{i+1})/8,$$

або ж результат низькочастотної фільтрації на основі фільтру такий:

$$pH_i^{(S_{2,0})} = \sum_{j=i-1}^{i+1} p_j \cdot \gamma_{j-i}^{(2,0)},$$

де  $\left\{ p n_i^{(S_{2,0})} \right\}$  – відліки після накладання фільтру на основі  $S_{r,0}(p,t)$ ,  $r \geq 2$ ;

$$\left( \gamma^{(2,0)} \right)^T = \frac{1}{8} (1 \ 6 \ 1)$$

– відповідна маска низькочастотного фільтру. Для прикладу, при  $r = 5$  має місце такий низькочастотний фільтр [9]:

$$p n_i^{(S_{5,0})} = \sum_{j=i-2}^{i+2} p_j \cdot \gamma_{j-i}^{(5,0)}, \quad (6)$$

де 
$$\left( \gamma^{(5,0)} \right)^T = \frac{1}{120} (1 \ 26 \ 66 \ 26 \ 1).$$

Ефективність фільтрації згідно моделі (5) за даними (1), при відносно значних величинах параметра  $\sigma_\varepsilon$  в (2), можна підвищити, якщо робити фільтр рекурсивним. Розглянемо приклад фільтрації цифрового сигналу з випадковою вадою, розподіленою з щільністю (2), коли  $\sigma_\varepsilon = 1$  (рис.3).

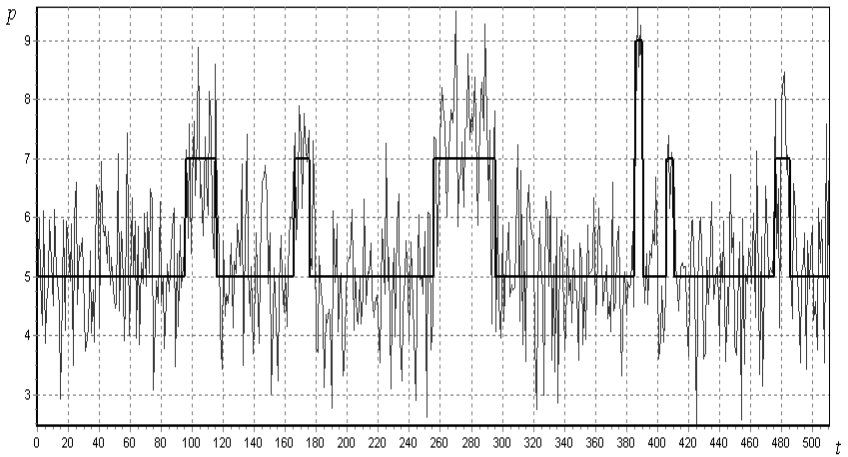
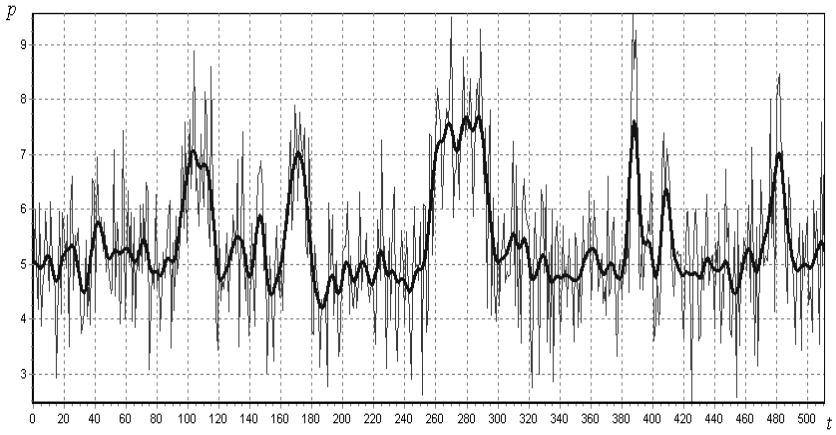
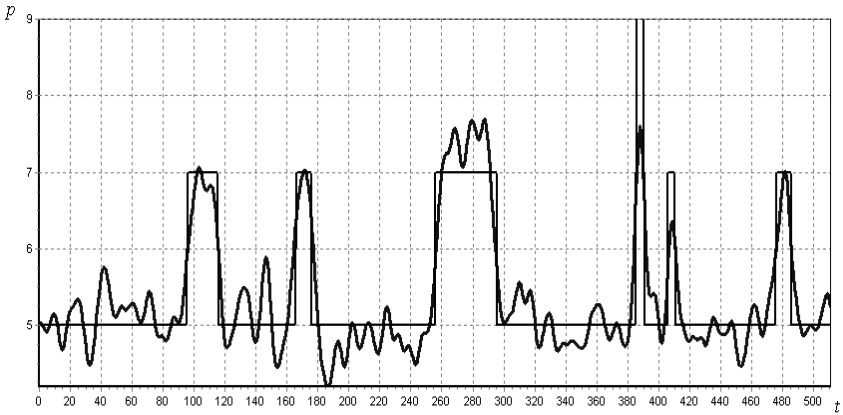


Рис.3. Цифровий сигнал (прямокутні імпульси) з вадою (2),  $\sigma_\varepsilon = 1$ .

На графіку (рис.4) подано фільтрацію після десятикратного рекурентного застосування функціоналу (6). Відмітимо, що спостерігається зменшення осциляцій і при цьому, якщо застосовувати процедуру розділення за порогом можливо достатньо адекватно виділити незашумлений сигнал. Недоліком поданого підходу є те, що за невідомою величиною параметра  $\sigma_\varepsilon$  в моделі (2), важко наперед визначити кількість рекурсій фільтру.



а)



б)

Рис. 4. Результат 10-ти рекурсій фільтра (б)

а) разом із зашумленим сигналом; б) разом із початковим сигналом.

Іншим підходом до виділення сигналу із зашумленої послідовності є спосіб на основі обчислювального аспекту кратномасштабного аналізу сигналу та *subdivision*-процедур на основі сплайн-операторів, близьких до інтерполяційних [10]. Не зменшуючи загальності позначимо  $\{p_{i,0}\}$  для запису обчислювальної схеми при роботі з послідовністю що задає цифровий сигнал. Для рекурентного двократного збільшення масштабу (двокрратного зменшення кількості членів послідовності) на кожному  $k$ -му

( $\kappa = 1, 2, \dots$ ) кроці рекурсії достатньо позбутись у новій  $\kappa$ -ій послідовності кожного другого відліка ( $\kappa - 1$ )-ої. Тобто, якщо  $\{p_{i,\kappa}\}_{i \in \mathbb{Z}}$  – деяка змасштабована послідовність, то

$$t_{i,\kappa} = t_{2i,\kappa-1}, \quad p_{i,\kappa} = p_{2i,\kappa-1}, \quad (7)$$

при цьому пам'ять під розміщення величин  $p_{2i+1,\kappa-1}$  звільнюється.

Окрім тривіального визначення членів послідовності  $\{p_{i,\kappa}\}_{i \in \mathbb{Z}}$  згідно (7), можна реалізувати збільшення масштабу, наприклад, зі згладжуванням. Тоді величини  $p_{i,\kappa}$  визначаються на підставі лінійного функціоналу

$$p_{i,\kappa} = A(p^{\kappa-1, 2i}), \quad i \in \mathbb{Z},$$

що побудований на даних попереднього кроку рекурсії. За використанням фільтру (6) функціонал  $A(p^{\kappa-1, 2i})$  можна подати так:

$$A(p^{\kappa-1, 2i}) = (p_{2i-2,\kappa-1} + 26p_{2i-1,\kappa-1} + 66p_{2i,\kappa-1} + 26p_{2i+1,\kappa-1} + p_{2i+2,\kappa-1}) / 120, \quad i \in \mathbb{Z}. \quad (8)$$

Для повернення початкової кількості членів послідовності, що визначає цифровий сигнал, можна скористатись *subdivision*-процедурою – рекурентним алгоритмом, що на  $\kappa$ -му ( $\kappa = 1, 2, \dots$ ) кроці роботи приводить до дворазового, у порівнянні з ( $\kappa - 1$ )-м кроком, збільшення кількості відліків, причому

$$t_{2i,\kappa} = t_{i,\kappa-1}, \quad p_{2i,\kappa} = p_{i,\kappa-1}, \quad i \in \mathbb{Z}$$

та

$$t_{2i \pm 1, \kappa} = t_{i, \kappa-1} \pm h / 2^{\kappa+1},$$

$$p_{2i \pm 1, \kappa} = p_{i \pm 0.5, \kappa-1} = B(p^{\kappa-1, i}), \quad i \in \mathbb{Z},$$

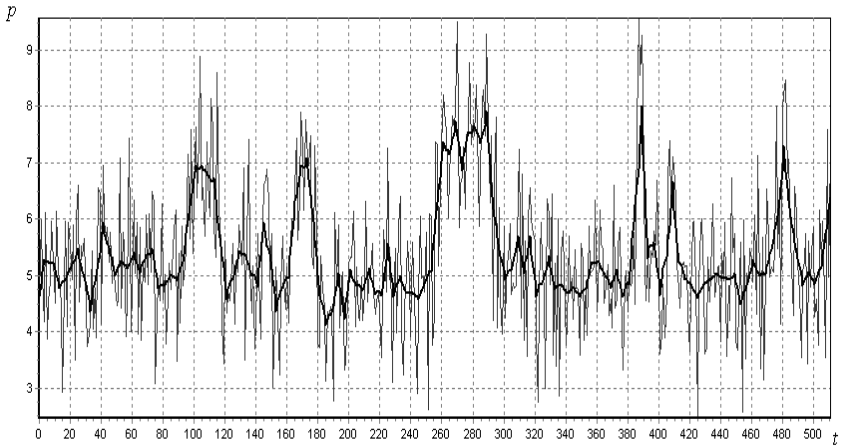
де  $B(p^{\kappa-1, i})$  – деякий лінійний функціонал, який базується на даних попереднього кроку рекурсії. Функціонал  $B(p^{\kappa-1, i})$  може бути отриманий як на основі виразів (5), так за використанням операторів, близьких до інтерполяційних. Для визначеності подамо оператори на основі локального поліноміальних сплайнів, на основі  $B$ -сплайнів четвертого порядку [10], близьких до інтерполяційних у середньому нульового

$$p_{2i\pm i, \kappa}^{(S_{4,0})} = (p_{i\mp 1, \kappa-1} + 11p_{i, \kappa-1} + 11p_{i\pm 1, \kappa-1} + p_{i\pm 2, \kappa-1}) / 24$$

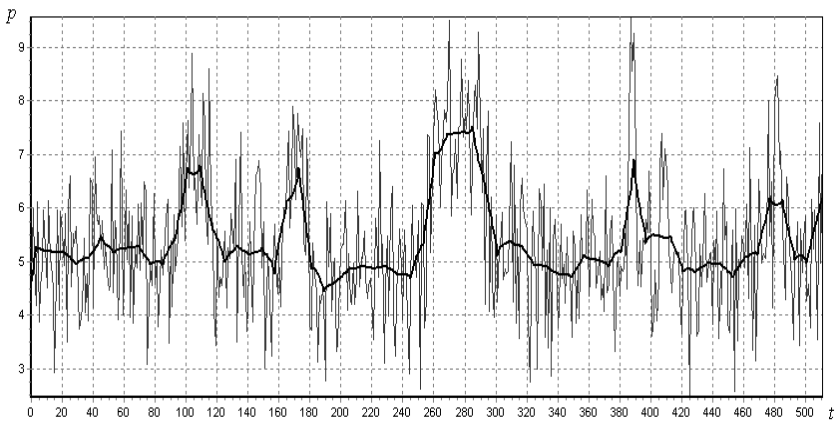
та першого ступеня уточнення

$$p_{2i\pm i, \kappa}^{(S_{4,1})} = (-p_{i\mp 2, \kappa-1} - 5p_{i\mp 1, \kappa-1} + 54p_{i, \kappa-1} + 54p_{i\pm 1, \kappa-1} - 5p_{i\pm 2, \kappa-1} - p_{i\pm 3, \kappa-1}) / 96. \quad (9)$$

На графіках (рис.5) подано приклад застосування операторів (8) та (9) відповідно при  $\kappa$ , що дорівнює 2, 3 та 4 рекурсіям.

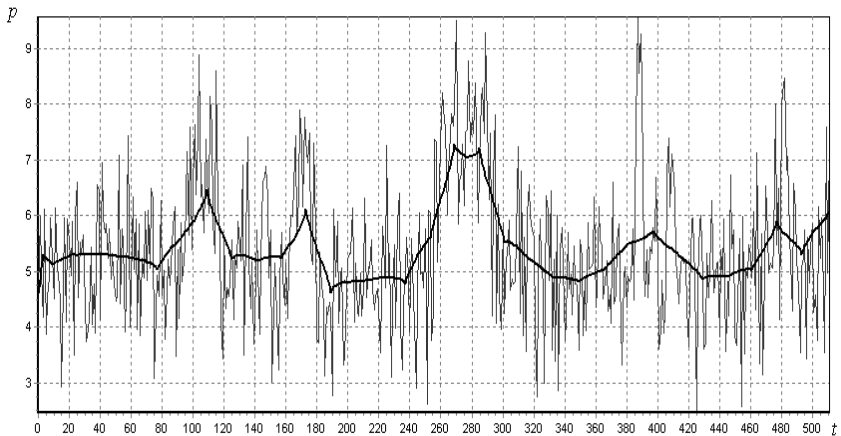


а)



б)





в)

Рис.5. Фільтрація сигналу при рекурентному використанні виразів (8), (9) при кількості рекурсій: а)  $\kappa = 2$ ; б)  $\kappa = 3$ ; в)  $\kappa = 4$ .

**Висновки.** З аналізу графіків можна зробити висновок, про обчислювальну ефективність та візуальну адекватність запропонованого підходу (зокрема на основі процедур масштабування) при виділенні сигналу, проте, результат суттєво різниться від кількості рекурсій. У свою чергу, подальших досліджень потребує обґрунтування зв'язку параметра  $\sigma_\varepsilon$  в моделі високочастотної завади сигналу та кількістю рекурсій при низькочастотній фільтрації на основі операторів типу (6) та виразів (8), (9).

Наостанок варто зазначити, що окрім цифрової обробки сигналів подані оператори без жодних обмежень можуть мати застосування при попередній обробці нестационарних випадкових процесів та при згладжуванні часових рядів.

#### Література.

1. M. Unser, "Splines: A Perfect Fit for Signal and Image Processing," *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 16, no. 6, pp. 22-38, 1999.
2. M. Unser, T. Blu, "Wavelet Theory Demystified," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 51, no. 2, pp. 470-483, 2003.
3. Лигун А.А., Шумейко А.А. Асимптотические методы восстановления кривых.- К.: ИМ НАНУ, 1997.- 358 с.
4. Чуи Ч. Введение в вейвлеты // Пер. с. англ. –М.: Мир, 2001. –412 с.
5. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам / И. Добеши. – Ижевск:

НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001, – 464 с.

6. Де Бор К. Практическое руководство по сплайнам.- М.: Радио и связь, 1985.- 303 с.

7. Корнейчук Н.П. Сплаины в теории приближения. -М.: Наука, 1984.- 351 с.

8. Приставка П.О. Обчислювальні аспекти застосування поліноміальних сплайнів при побудові фільтрів / Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій.- Д.: Вид-во Дніпропетр. ун-ту.- 2006. -Т.10. – С.3-14.

9. Чолишкіна О.Г. Застосування поліноміальних сплайнів на оснві  $B$ -сплайнів  $p$ 'ятого порядку під час побудови фільтрів / О.Г. Чолишкіна // Вісн. НАУ. – К.: НАУ. – 2009. –№1. – С. 214–218.

10. Приставка П.О. Поліноміальні сплайни при обробці даних. – Д.: Вид-во Дніпропетр. ун-ту, 2004. – 236 с.

11. Лигун А.А., Кармазина В.В. О восстановлении эмпирической функции плотности распределения с помощью гистосплайнов второго порядка/ Днепродзержинский индустр. ин-т.- Днепродзержинск, 1989.-30 с.- Деп. в УкрНИИНТИ 8.06.89, N1559- Ук89.