УДК 519.652:519.254

П.О.Приставка

ПРОЦЕДУРИ НЕБІНАРНОГО *SUBDIVISION* НА ОСНОВІ ЛІНІНЙИХ КОМБІНАЦІЙ В-СПЛАЙНІВ, БЛИЗЬКИХ ДО ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ У СЕРЕДНЬОМУ

Запропоновано загальну постановку задачі на проведення небінарного *subdivision* на основі локальних сплайнів, наведено відповідні лінійні оператори, визначено місцезнаходження відліків для проектування числових послідовностей.

Постановка проблеми. Стала тенденція до збільшення обсягів даних, що обробляються, на сьогодні є об'єктивною реальністю. Серед інформації, котра зберігається в електронному вигляді є певна категорія даних, які потребують при обробці математичних процедур, що побудовані на основі методів інтерполяції: цифрові зображення та відео, часові ряди та цифрові сигнали, комп'ютерні анімаційні та інші просторові моделі, тощо. Розробники відповідного програмного забезпечення, що працюють з такими даними, давно використовують швидкодіючі процедури, засновані на локальній інтерполяції (типово – *B*-сплайни), проте, є необхідність враховувати потребу у зменшенні кількості обчислювальних операцій при побудові апроксимацій.

Дані, про які мова, в електронному вигляді представлені у вигляді послідовностей відліків (сигналів, тощо), заданих у вузлових точках. Зміна кількості відліків у послідовностях у довільну кількість раз (необов'язково у цілочисельну) можна забезпечити на основі неперервних інтерполяцій. Але, якщо зміна масштабу послідовності здійснюється на певний наперед відомий коефіцієнт, то в цьому разі для апроксимацій, що мають явний вигляд, можна отримати обчислювальні процедури з меншою обчислювальною складністю, як часткові випадки. Як приклад – *subdivision*-процедури, для котрих отримання нових та вдосконалення алгоритмізації існуючих є задачею актуальною.

Аналіз досліджень та постановка задачі. З точки зору постановки задачі, застосування апроксимацій гладких функцій є спрощенням при виборі методу неперервної апроксимації, придатного для зміни кількості

членів цифрових послідовностей. Таке спрощення не є грубим на разі використання методів на основі фінітних функцій, зокрема B-сплайнів. Вагомий внесок в фундаментальну розробку апарату апроксимацій на основі B-сплайнів внесли І.Шоенберг, К.Де Бор, М.П.Корнійчук, А.О.Лигун [1 – 3] та інш. Теоретичні та практичні дослідження сплайнів на основі B-сплайнів, близьких до інтерполяційних у середньому, подано, наприклад, в роботах [4; 5]. Стосовно останнього типу сплайнів можна відмітити, що вибір в якості апарату апроксимації операторів, що є близькими до інтерполяційних у середньому, обумовлений більш високою стійкістю оцінки наближення за даними, що є різного роду результатами вимірювань та можуть бути використані в якості моделі аналогового сигналу [6].

Нехай з кроком $h>0$ задано розбиття дійсної вісі $\Delta_h : t_i = ih$, $i \in \mathbb{Z}$, у кожній точці якого отримано значення деякої неперервної функції $p(t)$, визначеної на $\mathbb{R}_1(-\infty;\infty)$. Вважаємо, що інформацію про функцію $p(t)$ задано у вузлах розбиття Δ_h у вигляді інтеграла

$$\overline{p}_i = \frac{1}{h}\int\limits_{(i-0,5)h}^{(i+0,5)h} p(t)\,dt, \tag{1}$$

при цьому, істинне значення функції $p(t)$ у вузлах таке:

$$p_i = \overline{p}_i + \varepsilon_i,\ i \in \mathbb{Z},$$

де ε_i – похибка.

Для апроксимації функції $p(t)$ за значеннями типу (1) у вузлах розбиття Δ_h, застосовують поліноміальні сплайни, що є близькими до інтерполяційних у середньому на основі B-сплайнів другого – п’ятого порядків [4; 5; 7]. Наприклад, сплайн

$$S_{2,1}(p,t) = \sum_{i \in Z}\left(p_i - \frac{1}{6}\Delta^2 p_i\right) B_{2,h}\big(t - (i+0,5)h\big), \tag{2}$$

де

$$B_{2,h}(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [-3h/2; 3h/2], \\ (3+2t/h)^2/8, & t \in [-3h/2; -h/2], \\ 3/4 - (2t/h)^2/4, & t \in [-h/2; h/2], \\ (3-2t/h)^2/8, & t \in [h/2; 3h/2]; \end{cases}$$

$$\Delta^2 p_i = p_{i-1} - 2p_i + p_{i+1},$$

має високу якість апроксимації, зокрема, при $h \to 0$ для довільної

$p(t)\in C^3$ буде виконуваатись

$$\left\| p(t)-S_{2,1}(\bar{p},t)\right\| = \frac{h^3}{12\sqrt{3}}\left\| p^{(3)}(t)\right\| + \mathrm{o}\left(h^3\right).$$

З іншого боку, наприклад, для сплайну

$$S_{4,0}(p,t)=\sum_{i\in Z} p_i B_{4,h}\left(t-(i+0,5)h\right), \tag{3}$$

де

$$B_{4,h}(t)=\begin{cases} 0, & t\notin[-5h/2;5h/2], \\ (t/h+5/2)^4/24, & t\in[-5h/2;-3h/2], \\ \Psi(t/h)-5(t/h+1/2)^4/12, & t\in[-3h/2;-h/2], \\ \Psi(t/h), & t\in[-h/2;h/2], \\ \Psi(t/h)-5(t/h-1/2)^4/12, & t\in[h/2;3h/2], \\ (t/h-5/2)^4/24, & t\in[3h/2;5h/2]; \end{cases}$$

$$\Psi(t)=\frac{115}{192}-\frac{5}{8}t^2+\frac{1}{4}t^4,$$

притаманна властивість згладжування: при $h\to 0$ для довільної функції $p(t)\in C^2$ справедливо таке:

$$\left\| p(t)-S_{4,0}(\bar{p},t)\right\| = \frac{h^2}{4}\left\| p''(t)\right\| + \mathrm{o}\left(h^2\right).$$

Отже, при застосуванні того, чи іншого типу сплайну, залежно від потреби, можна отримувати або асмптотично точні оцінки, або ж забезпечувати згладжування локальних осциляцій в даних. При обчисленнях спайни зручно подавати у явному вигляді, наприклад, вирази (2) та (3) можна записати так:

$$S_{2,1}(p,t)=\frac{1}{48}\Big(-(1-x)^2 p_{i-2}+\left(2-16x+10x^2\right)p_{i-1}+$$
$$+\left(46-18x^2\right)p_i+\left(2+16x+10x^2\right)p_{i+1}-(1+x)^2 p_{i+2}\Big), \tag{4}$$

$$S_{4,0}(p,t)=\frac{1}{384}\Big((1-x)^4 p_{i-2}+\big(76-88x+24x^2+$$
$$+8x^3-4x^4\big)p_{i-1}+\left(230-60x^2+6x^4\right)p_i+$$

$$+\left(76+88x+24x^2-8x^3-4x^4\right)p_{i+1}+\left(1+x\right)^4 p_{i+2}\Big), \qquad (5)$$

де $\quad x=\frac{2}{h}\left(t-\left(i+0,5\right)h\right),\ \left|x\right|\le 1.$

Перехід від неперервних наближень на основі лінійних комбінацій *B*-сплайнів до процедур *subdivision* викликає практичний інтерес вже майже протягом останніх тридцяти років. Наприклад в монографії [8] є чимало подібних процедур, при цьому бібліографія складає 180 робіт. Автори роботи [9] започаткували цілу низку публікацій, що пропонують підходи до побудови *subdivision* що базуються на локальних сплайнах на основі *B*-сплайнів, близьких до інтерполяційних у середньому, наприклад [10]. В роботах [11; 12] отримані лінійні оператори небінарного масштабування одно- та двовимірних послідовностей відліків гладких функцій, які дозволяють здійснювати вказану операцію як з вимогою згладжування, так і асимптотично точно. Проте, загальної постановки задачі для процедур небінарного *subdivision* зроблено не було. Обумовлено це тим, що вибір конкретних часткових випадків локальних сплайнів, близьких до інтерполяційних у середньому, потребує автоматизованого визначення вузлів інтерполювання. Тож, це питання потребує узагальнення, що й визначає мету даної публікації.

Виклад основного матеріалу. Нехай у вузлах розбиття

$$\Delta_{h_M}: t_j = jh_M,\ h_M > 0$$

задано $P=\left\{p_{j,\kappa}\right\}_{j\in\mathbb{Z}}$, $\kappa=1,2,\ldots$ – послідовність відліків гладкої функції $p\left(t\right)$. Під κ будемо розуміти ітераційний крок небінарного масштабування проектування послідовності P. Тоді, якщо $\left\{p_{i,\kappa-1}\right\}_{i\in\mathbb{Z}}$ – початкова послідовність, визначена у вузлах розбиття

$$\Delta_{h_N}: t_i = ih_N,\ h_N > 0,$$

а $\left\{p_{j,\kappa}\right\}_{j\in\mathbb{Z}}$ – утворена, шляхом «проектування» будь-яких N послідовних точок в M, то маємо визначення для $p_{j,\kappa}$, наведене нижче.

Для довільного індексу i зафіксуємо N вузлів $\left\{t_{i+u,\kappa-1}\right\}_{i\in\mathbb{Z},\ u=\overline{0,N-1}}$ в яких визначено значення $\left\{p_{i+u,\kappa-1}\right\}_{i\in\mathbb{Z},\ u=\overline{0,N-1}}$. Суть проектування N точок в M полягає в тому, що на кожній ітерації в межах інтервалу

$$\left[-h_N/2+ih_N,\, ih_N+(N-1)h_N+h_N/2\right]$$

визначаємо нові вузли з рівномірним кроком $h_M>0$.

На інтервалі

$$\left[-h_M/2+jh_M,\, jh_M+(M-1)h_M+h_M/2\right],$$

де

$$-h_N/2+ih_N=-h_M/2+jh_M;$$

$$h_M=\frac{N}{M}h_N.$$

будемо визначати члени послідовності $P=\left\{p_{j,\kappa}\right\}_{j\in\mathbb{Z}}$ на основі лінійних операторів, що базуються на даних попереднього кроку рекурсії:

$$p_{j+l,\kappa}=A_l\left(p^{\kappa-1,i}\right),\; l=\overline{0,M-1},$$

де $A_l\left(p^{\kappa-1,i}\right)$ неважко отримати як часткові випадки сплайнів на зразок (2), (3).

У загальному випадку для конкретного l знаходимо величини

$$u^*=\frac{N(2l+1)}{2M},\qquad u=\left[u^*\right],\qquad \text{де } [\cdot] \text{ - ціла частина,}$$

$$x_l=2\left(u^*-u\right)-1$$

та підставляємо в явну формулу для сплайну, визначеного на розбитті Δ_{h_N}. Наприклад з виразу (4) отримуємо:

$$p_{j+l,\kappa}=\frac{1}{48}\Big(-(1-x_l)^2\,p_{i+u-2,\kappa-1}+\left(2-16x_l+10x_l^2\right)p_{i+u-1,\kappa-1}+$$
$$+\left(46-18x_l^2\right)p_{i+u,\kappa-1}+\left(2+16x_l+10x_l^2\right)p_{i+u+1,\kappa-1}-(1+x_l)^2\,p_{i+u+2,\kappa-1}\Big). \tag{6}$$

Для зменшення обчислювальної складності пропонується замість формул на зразок (6) використовувати наперед визначені часткові випадки сплайнів при конкретних значеннях аргументу x. Наприклад, при $x_l=1/3$ вираз (6) перепишеться так:

$$p_{j+l,\kappa}=\frac{1}{108}\left(-p_{i+u-2,\kappa-1}-5p_{i+u-1,\kappa-1}+99p_{i+u,\kappa-1}+19p_{i+u+1,\kappa-1}-4p_{i+u+2,\kappa-1}\right)$$

або

$$p_{j+l,\kappa} = \sum_{ii=i+u-2}^{i+u+2} \gamma_{\left(\frac{1}{3}\right)}^{(2,1)}{}_{ii-i+u} \cdot p_{ii,\kappa-1} \,,$$

де $\gamma_{\left(\frac{1}{3}\right)}^{(2,1)} = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 99 & 19 & -4 \end{pmatrix}^T \big/ 108$.

Загалом, для часткових випадків локальних поліноміальних сплайнів парних ступенів на основі *B*-сплайнів, близьких до інтерполяційних у середньому [4;5], має місце загальна формула для визначення лінійних операторів небінарного *subdivision*:

$$p_{j+l,\kappa} = \sum_{ii=i+u-w}^{i+u+w} \gamma_{(x)}^{(r,v)}{}_{ii-i+u} \cdot p_{ii,\kappa-1} \,, \tag{7}$$

де $\gamma_{(x)}^{(r,v)}$ – маска оператора дискретної згортки; $2 \cdot w + 1$ – ширина маски; r – порядок сплайну; v – порядок уточнення сплайну; x – часткове значення аргументу в явному поданні сплайну.

Наприклад, для x, що може набувати значення із множини

$$\left\{-1,-\frac{4}{5},-\frac{3}{4},-\frac{2}{3},-\frac{3}{5},-\frac{1}{2},-\frac{2}{5},-\frac{1}{3},-\frac{1}{4},-\frac{1}{5},0,\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},1\right\}, \tag{8}$$

мають місце такі маски, отримані з часткових випадків виразу (4):

$$\gamma_{(-1)}^{(2,1)} = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 7 & -1 & 0 \end{pmatrix}^T \big/ 12 \,;$$

$$\gamma_{\left(-\frac{4}{5}\right)}^{(2,1)} = \begin{pmatrix} -81 & 530 & 862 & -110 & -1 \end{pmatrix}^T \big/ 1200 \,;$$

$$\gamma_{\left(-\frac{3}{4}\right)}^{(2,1)} = \begin{pmatrix} -49 & 314 & 574 & -70 & -1 \end{pmatrix}^T \big/ 768 \,;$$

$$\gamma_{\left(-\frac{2}{3}\right)}^{(2,1)} = \begin{pmatrix} -25 & 154 & 342 & -38 & -1 \end{pmatrix}^T \big/ 432 \,;$$

$$\gamma_{\left(-\frac{3}{5}\right)}^{(2,1)} = \begin{pmatrix} -16 & 95 & 247 & -25 & -1 \end{pmatrix}^T \big/ 300 \,;$$

$$\gamma_{\left(-\frac{1}{2}\right)}^{(2,1)} = \begin{pmatrix} -9 & 50 & 166 & -14 & -1 \end{pmatrix}^T \big/ 192 \,;$$

$$\gamma_{\left(-\frac{2}{5}\right)}^{(2,1)} = \begin{pmatrix} -49 & 250 & 1078 & -70 & -9 \end{pmatrix}^T \big/ 1200 \,;$$

$$\gamma_{\left(-\frac{1}{3}\right)}^{(2,1)} = \begin{pmatrix} -4 & 19 & 99 & -5 & -1 \end{pmatrix}^T \big/ 108 \,;$$

$$\gamma_{\left(-\frac{1}{4}\right)}^{(2,1)} = \begin{pmatrix} -25 & 106 & 718 & -22 & -9 \end{pmatrix}^T \big/ 768 \,;$$

$$\gamma_{\left(-\frac{1}{5}\right)}^{(2,1)}\left(-9 \quad 35 \quad 283 \quad -5 \quad -4\right)^{T} \Big/ 300\,;$$

$$\gamma_{(0)}^{(2,1)}=\left(-1 \quad 2 \quad 46 \quad 2 \quad -1\right)^{T} \Big/ 48\,;$$

$$\gamma_{\left(\frac{1}{5}\right)}^{(2,1)}=\left(-4 \quad -5 \quad 283 \quad 35 \quad -9\right)^{T} \Big/ 300\,;$$

$$\gamma_{\left(\frac{1}{4}\right)}^{(2,1)}=\left(-9 \quad -22 \quad 718 \quad 106 \quad -25\right)^{T} \Big/ 768\,;$$

$$\gamma_{\left(\frac{1}{3}\right)}^{(2,1)}=\left(-1 \quad -5 \quad 99 \quad 19 \quad -4\right)^{T} \Big/ 108\,;$$

$$\gamma_{\left(\frac{2}{5}\right)}^{(2,1)}=\left(-9 \quad -70 \quad 1078 \quad 250 \quad -49\right)^{T} \Big/ 1200\,;$$

$$\gamma_{\left(\frac{1}{2}\right)}^{(2,1)}=\left(-1 \quad -14 \quad 166 \quad 50 \quad -9\right)^{T} \Big/ 192\,;$$

$$\gamma_{\left(\frac{3}{5}\right)}^{(2,1)}=\left(-1 \quad 25 \quad 247 \quad 95 \quad -16\right)^{T} \Big/ 300\,;$$

$$\gamma_{\left(\frac{2}{3}\right)}^{(2,1)}=\left(-1 \quad -38 \quad 342 \quad 154 \quad -25\right)^{T} \Big/ 432\,;$$

$$\gamma_{\left(\frac{3}{4}\right)}^{(2,1)}=\left(-1 \quad -70 \quad 574 \quad 314 \quad -49\right)^{T} \Big/ 768\,;$$

$$\gamma_{\left(\frac{4}{5}\right)}^{(2,1)}=\left(-1 \quad -110 \quad 862 \quad 530 \quad -81\right)^{T} \Big/ 1200\,;$$

$$\gamma_{(1)}^{(2,1)}=\left(0 \quad -1 \quad 7 \quad 7 \quad -1\right)^{T} \Big/ 12\,.$$

Для сплайну (5), коли x може набувати значення із множини (8), мають місце наступні маски:

$$\gamma_{(-1)}^{(4,0)}=\left(1 \quad 11 \quad 11 \quad 1 \quad 0\right)^{T} \Big/ 24\,;$$

$$\gamma_{\left(-\frac{4}{5}\right)}^{(4,0)}=\left(6561 \quad 97516 \quad 121286 \quad 14636 \quad 1\right)^{T} \Big/ \left(24\cdot 10^{4}\right);$$

$$\gamma_{\left(-\frac{3}{4}\right)}^{(4,0)}=\left(2401 \quad 38620 \quad 50726 \quad 6556 \quad 1\right)^{T} \Big/ 98304\,;$$

$$\gamma_{\left(-\frac{2}{3}\right)}^{(4,0)}=\left(625 \quad 11516 \quad 16566 \quad 2396 \quad 1\right)^{T} \Big/ 31104\,;$$

$$\gamma_{\left(-\frac{3}{5}\right)}^{(4,0)}=\left(256 \quad 5281 \quad 8171 \quad 1291 \quad 1\right)^{T} \Big/ 15000\,;$$

$$\gamma_{\left(-\frac{1}{2}\right)}^{(4,0)}=\left(81 \quad 1996 \quad 3446 \quad 620 \quad 1\right)^{T} \Big/ 6144\,;$$

$$\gamma^{(4,0)}_{\left(-\frac{2}{5}\right)} = \left(2401 \quad 71516 \quad 137846 \quad 28156 \quad 81\right)^T \Big/ \left(24 \cdot 10^4\right);$$

$$\gamma^{(4,0)}_{\left(-\frac{1}{3}\right)} = \left(16 \quad 545 \quad 1131 \quad 251 \quad 1\right)^T \Big/ 1944;$$

$$\gamma^{(4,0)}_{\left(-\frac{1}{4}\right)} = \left(625 \quad 21212 \quad 57926 \quad 18460 \quad 81\right)^T \Big/ 98304;$$

$$\gamma^{(4,0)}_{\left(-\frac{1}{5}\right)} = \left(81 \quad 3691 \quad 8891 \quad 2321 \quad 16\right)^T \Big/ 15000;$$

$$\gamma^{(4,0)}_{(0)} = \left(1 \quad 76 \quad 230 \quad 76 \quad 1\right)^T \Big/ 384;$$

$$\gamma^{(4,0)}_{\left(\frac{1}{5}\right)} = \left(16 \quad 2321 \quad 8891 \quad 2321 \quad 81\right)^T \Big/ 15000;$$

$$\gamma^{(4,0)}_{\left(\frac{1}{4}\right)} = \left(81 \quad 18460 \quad 57926 \quad 21212 \quad 625\right)^T \Big/ 98304;$$

$$\gamma^{(4,0)}_{\left(\frac{1}{3}\right)} = \left(1 \quad 251 \quad 1131 \quad 545 \quad 16\right)^T \Big/ 1944;$$

$$\gamma^{(4,0)}_{\left(\frac{2}{5}\right)} = \left(81 \quad 28156 \quad 137846 \quad 71516 \quad 2401\right)^T \Big/ \left(24 \cdot 10^4\right);$$

$$\gamma^{(4,0)}_{\left(\frac{1}{2}\right)} = \left(1 \quad 620 \quad 3446 \quad 1996 \quad 81\right)^T \Big/ 6144;$$

$$\gamma^{(4,0)}_{\left(\frac{3}{5}\right)} = \left(1 \quad 1291 \quad 8171 \quad 5281 \quad 256\right)^T \Big/ 15000;$$

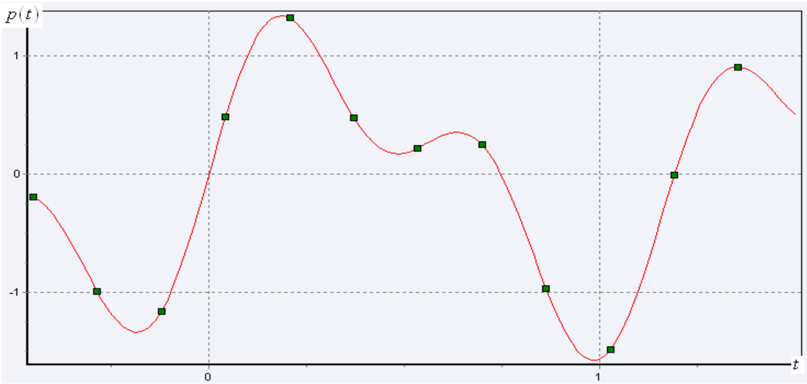
$$\gamma^{(4,0)}_{\left(\frac{2}{3}\right)} = \left(1 \quad 2396 \quad 16566 \quad 11516 \quad 625\right)^T \Big/ 31104;$$

$$\gamma^{(4,0)}_{\left(\frac{3}{4}\right)} = \left(1 \quad 6556 \quad 50726 \quad 38620 \quad 2401\right)^T \Big/ 98304;$$

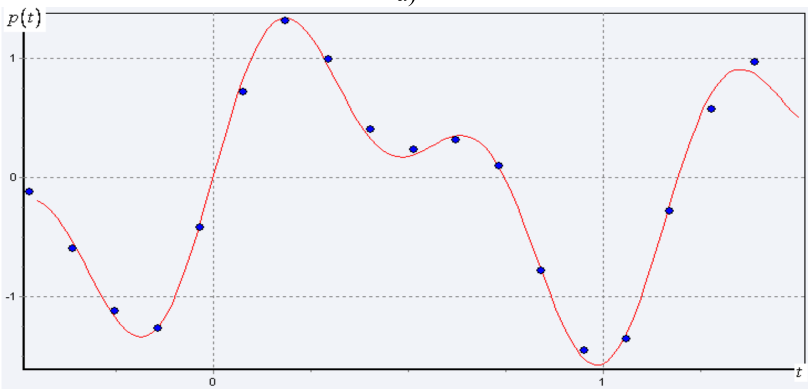
$$\gamma^{(4,0)}_{\left(\frac{4}{5}\right)} = \left(1 \quad 14636 \quad 121286 \quad 97516 \quad 6561\right)^T \Big/ \left(24 \cdot 10^4\right);$$

$$\gamma^{(4,0)}_{(1)} = \left(0 \quad 1 \quad 11 \quad 11 \quad 1\right)^T \Big/ 24.$$

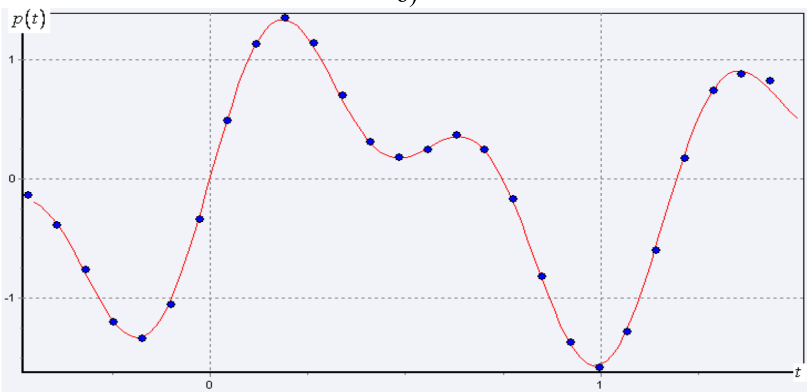
На графіках (рис.1) подано приклад небінарного *subdivision* при проектуванні кожних 2-х послідовних точок в 3-и. В якості лінійних операторів масштабування брались часткові випадки сплайну (4) відповідно в точках $x = -1/3$, $x = -1$, $x = 1/3$, котрим, згідно виразу (7) відповідають маски $\gamma^{(2,1)}_{\left(-\frac{1}{3}\right)}$, $\gamma^{(2,1)}_{(-1)}$, $\gamma^{(2,1)}_{\left(\frac{1}{3}\right)}$.



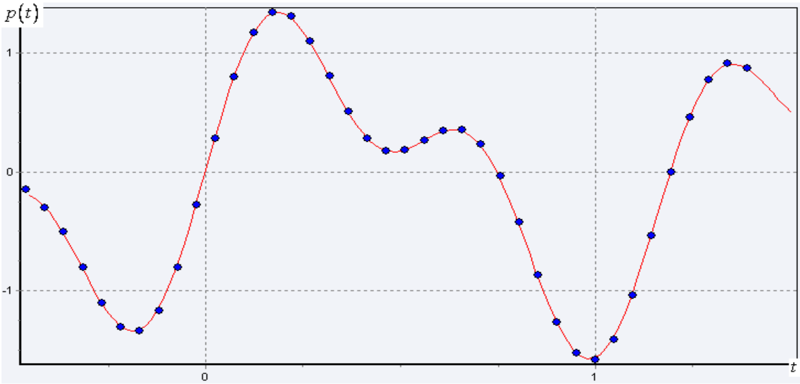
а)



б)



в)



г)

Рис.1. Небінарний *subdivision* «2 в 3» на основі сплайну (4):
а) функція $p(t)=\sin(5t)+0,6\sin(11t)$, $t\in[-0,45;1,52]$ та її початкові відліки; б) *subdivision* при $\kappa=1$; в) *subdivision* при $\kappa=2$; г) *subdivision* при $\kappa=3$

Висновки. В роботі запропоновано загальну постановку задачі на проведення небінарного *subdivision* на основі лінійних комбінацій *B*-сплайнів, близьких до інтерполяційних у середньому. Викладено загальний спосіб визначення місцезнаходження відліків для проектування числових послідовностей. Наведено часткові випадки сплайн-операторів у вигляді дискретної згортки послідовності відліків та відповідних масок.

Подальші дослідження можуть бути спрямовані на оцінку якості наближення функцій спостережень, при умові, коли данні задано з різними типами завад. Вартим уваги може бути питання узагальнення поданих процедур не бінарного *subdivision* на випадок багатовимірних послідовностей.

Література

1. Де Бор К. Практическое руководство по сплайнам. – М.: Радио и связь, 1985. – 303 с.
2. Роджерс Д., Адамс Дж. Математические основы машинной графики: Пер. с англ. –М.: Мир, 2001. –604 с.
3. Чуи Ч. Введение в вэйвлеты: Пер. с агнгл. –М.: Мир, 2001. –412 с.
4. Лигун А.А., Шумейко А.А. Асимптотические методы восстановления кривых. –К.: ІМ НАН України, 1996. – 358 с.
5. Приставка П.О. Поліномаільні сплайни при обробці даних – Д.: Вид-во Дніпропетр. ун-ту, 2004. – 236 с.

6. Приставка П.О. Лінійні комбінації *B*-сплайнів, близькі до інтерполяційних у середньому, в задачі моделювання аналогових сигналів / Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій : Зб. наук. праць. ─ Д.: Вид-во Дніпропетр. ун-ту. ─ 2011. ─ Т.15. –С.4─17.
7. Приставка П.О., Чолишкіна О.Г. Дослідження *B*-сплайну п'ятого порядку та їх лінійної комбінації / Математичне моделювання. – ДДТУ, Дніпродзержинськ. – 2007. ─ №1(16). ─ С.14─17.
8. Andersson L.-E., Stewart N. Introduction to the mathematics of subdivision surfaces. – Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2010. – 356 p.
9. Лигун А.А., Шумейко А.А. Исследования линейных операторов порожденных методами пополнения данных // Математичне моделювання, Діпродзержинськ, ДГТУ, 2 (5), 2000, с.11─19.
10. Приставка П.О. Поліноміальні сплайни в задачах бінарного поповнення / Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій. ─ Д.: Вид-во Дніпропетр. ун-ту. ─ 2003. ─Т.7. –С.39─53.
11. Приставка П.О. Небінарне поповнення послідовностей відліків гладких функцій лінійними операторами на основі поліноміальних сплайнів / Вісн. НАУ. ─ К.: НАУ. ─ 2008. ─№3. ─С. 85─89.
12. Приставка П.О. Небінарне поповнення послідовностей відліків гладких функцій двох змінних лінійними операторами / Вісн. НАУ. ─ К.: НАУ. ─ 2009.-№2. ─С. 173─ 177.