УДК 519.652:519.254

П.О.Приставка

ЛІНІЙНІ КОМБІНАЦІЇ *B*-СПЛАЙНІВ, БЛИЗЬКІ ДО ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ У СЕРЕДНЬОМУ, В ЗАДАЧІ МОДЕЛЮВАННЯ АНАЛОГОВИХ СИГНАЛІВ

Для побудови моделей аналогових сигналів зі скінченою енергією пропонується використовувати лінійні комбінації *B*-сплайнів, близькі до інтерполяційних у середньому другого порядку та вище.

Постановка проблеми. Останні десятиріччя серед методів обробки цифрових сигналів актуальність набули такі, що забезпечують адекватне опрацювання даних у режимі реального часу. Поясненням даного є потреба в обробці постійно зростаючих обсягів інформації, що передається, зберігається, обробляється, тощо. Деякі з таких методів є обчислювальним аспектом відомих підходів до апроксимації, наприклад, швидке перетворення Фур'є, для інших було спеціально розроблено теоретичне обґрунтування, наприклад, вейвлет-методи.

В якості критерію адекватності роботи методу вимагають, щоб результат обробки відповідав фізичній природі аналогового сигналу, представленням якого є цифровий сигнал. Така вимога значно простіше може бути виконана, якщо метод ґрунтується на моделі, що є апроксимацією аналогового сигналу, причому моделі, що при побудові потребує мінімальної кількості обчислювальних операцій та за своїми властивостями є близькою до властивостей сигналу. Наприклад, лінійні комбінації *B*-сплайнів [1–4] є обчислювальним засобом обробки послідовностей відліків функцій, якому притаманні ряд цінних властивостей: обчислювальна простота, можливість враховувати локальні «особливості» сигналу, згладжувальні властивості та інш. Проте, поліноміальний сплайн, що є лінійною комбінацією *B*-сплайнів, як модель аналогового сигналу не набув гідного поширення у вітчизняних наукових роботах [5–7], хоча й має висвітлення в багатьох працях за кордоном. А локальні поліноміальні сплайни, близькі до інтерполяційних у середньому на основі *B*-сплайнів як модель сигналу взагалі не використовувались, хоча й вводились А.О.Лигуном як апарат обробки даних, заданих з вадою.

Тому актуальним може бути узагальнення відомих понять та положень про сплайн-апроксимацію на випадок побудови неперервної моделі сигналу з кінцевою енергією саме останніми із зазначених вище сплайнів.

Аналіз публікацій та постановка задачі. Функція $s(t)$, задана та неперервна на відрізку $[a;b]$, називається поліноміальним сплайном порядку r ($r \ge 1$) з вузлами t_i, $i = \overline{0, N}$, $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N = b$, якщо на кожному з проміжків $[a;t_1]$, $[t_i;t_{i+1}]$, $i = \overline{1, N-2}$, $[t_{N-1};b]$, $s(t)$ є алгебраїчний багаточлен ступеня, що не перевищує r, а в кожній із точок t_i, $i = \overline{0, N}$ деяка похідна $s^{(v)}(t)$, ($1 \le v \le r$) може мати розрив [1]. Головними характеристиками сплайну є найбільший порядок r багаточленів із яких він складається, кількість і розташування вузлів та гладкість склеювання в кожному вузлі.

Якщо задано фіксовану систему точок $\Delta[a;b]$: $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N = b$, або, іншими словами, задано розбиття відрізку $[a;b]$, то множину $S_r^k(\Delta[a;b])$ називають множиною сплайнів порядку r дефекту k за розбиттям $\Delta[a;b]$. Множину $S_r^1(\Delta[a;b])$ (або просто $S_r(\Delta[a;b])$) називають множиною сплайнів мінімального дефекту.

Якщо довільним чином доповнити розбиття $\Delta[a;b]$ точками $t_{-r} < t_{-r+1} < \ldots t_{-1} < a$; $b < t_{N+1} < \ldots t_{N+r}$, у результаті чого одержують систему точок

$$t_{-r} < t_{-r+1} < \ldots t_{-1} < t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N < t_{N+1} < \ldots t_{N+r}, \qquad (1)$$

то тоді для кожного $i = \overline{-r, N-1}$ існує сплайн $B_{r,i}(t)$ порядку r дефекту 1 за розбиттям $t_i < t_{i+1} < \ldots < t_{i+r+1}$, який визначається рівностями

$$\int_{t_i}^{t_{i+r+1}} B_{r,i}(t)\,dt = 1, \qquad B_{r,i}(t) = 0,\ t < t_i;\ t > t_{i+r+1},$$

або

$$B_{r,i}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+r} - t_i} B_{r-1,i}(t) + \frac{t_{i+r+1} - t}{t_{i+r+1} - t_{i+1}} B_{r-1,i+1}(t),$$

$$\sum_{i=-r}^{N-1} B_{r,i}(t) = 1,$$

де
$$B_{0,i}(t)=\begin{cases}0, & t\notin[t_i;t_{i+1}],\\ 1, & t\in[t_i;t_{i+1}].\end{cases}$$

Сплайн $B_{r,i}(t)\in C^{r-1}(-\infty;\infty)$, визначений на всій дійсній вісі називається *B*-сплайном порядку r на сітці $t_i<t_{i+1}<\ldots<t_{i+r+1}$. При цьому відрізок $[t_i;t_{t+r+1}]$, на якому $B_{r,i}(t)>0$, називають носієм *B*-сплайну.

Відомо [1; 2], що система із $N+r$ *B*-сплайнів $B_{r,i}(t)$, $i=\overline{-r,N-1}$ порядку r за розбиттям (1) з носієм $[t_i;t_{t+r+1}]$ є базисом в $S_r(\Delta[a;b])$. Як наслідок, можна зазначити, що будь-який сплайн $s(t)\in S_r(\Delta[a;b])$ єдиним чином можна представити у вигляді
$$s(t)=\sum_{i=-r}^{N-i}c_iB_{r,i}(t),\ t\in[a;b], \tag{2}$$
де c_i, $i=\overline{-r,N-1}$ – деякі дійсні числа, такі, що
$$s(t)=\sum_{i=-r}^{N-i}c_iB_{r,i}(t)=0,$$
тоді і тільки тоді, коли $c_{-r}=c_{-r+1}=\ldots=c_{N-1}=0$.

Нехай при деякому $h>0$ задано рівномірне розбиття Δ_h дійсної вісі R_1 точками ih, $i\in Z$. Множину сплайнів порядку r мінімального дефекту, визначену на розбитті Δ_h позначають $S_r(\Delta_h)$. Тоді, якщо
$$B_{0,h}(t)=\begin{cases}0, & t\notin[-h/2;h/2],\\ 1, & t\in[-h/2;h/2],\end{cases} \tag{3}$$
то *B*-сплайн $B_{r,h}(t)\in S_r(\Delta_h)$ порядку r ($r\geq 1$) визначається рекурентно із співвідношення
$$B_{r,h}(t)=\frac{1}{h}\int_{t-h/2}^{t+h/2}B_{r-1,h}(\tau)d\tau. \tag{4}$$

Стосовно виразу (4) можна зазначити наступне. За визначенням $B_{0,h}(t)$ є характеристичною функцією інтервалу $[-h/2;h/2]$. Зауважимо, що питання «закритості» інтервалу не є принциповим для подальшого викладення, наприклад, в роботі [8] *B*-сплайн нульового порядку (з точністю до зсуву аргументу) вводиться так:

$$B_{0,h}(t)=\begin{cases}0, & t\notin[-h/2;h/2],\\ 1/2, & |t|=h/2,\\ 1, & t\in(-h/2;h/2).\end{cases}$$

В роботі [9] $B_{0,h}(t)$ подано, як характеристична функція напіввідкритого інтервалу $[-h/2;h/2)$ і для $r\geq 1$ відповідний сплайни $B_{r,h}(t)$ визначається рекурентно інтегралом згортки:

$$B_{r,h}(t)=\frac{1}{h}\int_{-\infty}^{\infty}B_{r-1,h}(t-\tau)B_{0,h}(\tau)d\tau .$$

На загал можна записувати операцію згортки так:

$$B_{r,h}(t)=(B_{r-1,h}*B_{0,h})(t)=\underbrace{(B_{0,h}*B_{0,h}*\ldots*B_{0,h})}_{(r+1)\ \textit{разів}}(t),$$

звідки вираз (4) слідує із фінітних властивостей *B*-сплайн-функції.

На розбитті Δ_h *B*-сплайн порядку r має в якості носія проміжок $d_r=[-(r+1)h/2;(r+1)h/2]$, отже

$$\int_{-\infty}^{\infty}B_{r,h}(t)dt=\int_{d_r}B_{r,h}(t)dt=\int_{-(r+1)h/2}^{(r+1)h/2}B_{r,h}(t)dt=h .$$

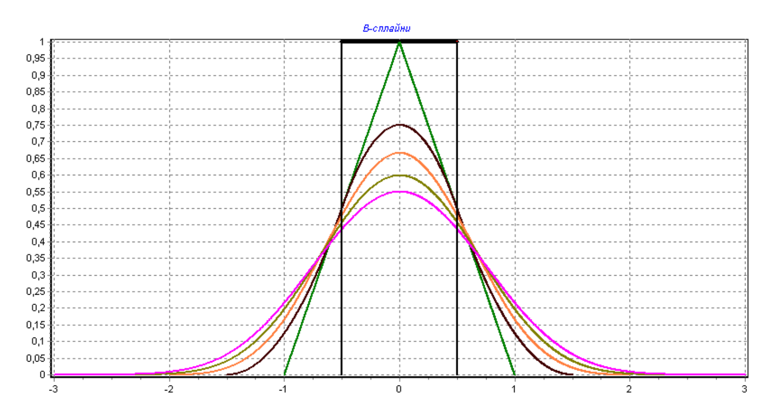

Рис.1. В-сплайни $r\geq 0$, $h=1$.

Із визначення *B*-сплайну на Δ_h та виразів (3), (4) не важко отримати аналітичні представлення $B_{r,h}(t)$ при різних значеннях r. Наприклад, при $r=2$ *B*-сплайн другого порядку визначається так [1]:

$$B_{2,h}(t)=\begin{cases} 0, & t\notin[-3h/2;3h/2], \\ (3+2t/h)^2/8, & t\in[-3h/2;-h/2], \\ 3/4-(2t/h)^2/4, & t\in[-h/2;h/2], \\ (3-2t/h)^2/8, & t\in[h/2;3h/2]. \end{cases} \tag{5}$$

Зрозуміло, що сплайни $B_{r,h}(t)$, $r\ge1$ є симетричними функціями відносно свого носія (рис.1).

Так само, як і у випадку нерівномірного розбиття, щодо *B*-сплайнів $B_{r,h}(t)$ можна стверджувати: якщо $S_r(\Delta_h)$ – множина всіх сплайнів мінімального дефекту за розбиттям Δ_h і $B_{r,h}(t)\in S_r(\Delta_h)$, $r\ge1$, то лінійна комбінація $S_r(t)$ сплайнів $B_{r,h}(t)$ також буде належати множині $S_r(\Delta_h)$, тому має місце вираз, аналогічний (1.2)

$$S_r(t)=\sum_{i\in Z}c_iB_{r,h}(t)\in S_r(\Delta_h). \tag{6}$$

Отже, лінійна комбінація $S_r(t)$, $r\ge1$ – є сплайн мінімального дефекту. Найчастіше подібні сплайни називають локальними поліноміальними сплайнами на основі *B*-сплайнів r-го порядку.

Розглянемо аналоговий сигнал $p(t)\in L_2(\mathbb{R})$ з кінцевою енергією, що визначається його нормою

$$\|p(t)\|_{L_2}=\langle p(t),p(t)\rangle^{1/2},$$

заданий дискретно (цифровий сигнал) відліками на рівномірному розбитті $\Delta_h: ih$, $i\in\mathbb{Z}$: $\{p_i\}\in l_2(\mathbb{Z})$. Зауважимо, що якщо говорять, що дискретний сигнал належить $l_2(\mathbb{Z})$, то $\sum\limits_{i\in\mathbb{Z}}|p_i|^2=\|p\|^2_{l_2(\mathbb{Z})}<+\infty$.

Згідно теореми Котельникова аналоговий сигнал з обмеженим спектром може бути точно перетворений в дискретний сигнал і потім точно відтворений за відліками цього дискретного сигналу [10]. Практично будь-який аналоговий сигнал має обмежений спектр і тому може бути замінений при правильно обраній частоті дискретизації відповідним дискретним сигналом. Якщо ж спектр сигналу фінітний і $h\to0$, то для точного відтворення можна скористатись таким виразом:

$$p(t)=\sum_{i\in\mathbb{Z}} p_i \frac{\sin\left(\pi\left(t-ih\right)/h\right)}{\left(\pi\left(t-ih\right)/h\right)}. \tag{7}$$

Головним обмеженням при застосуванні виразу (7) є обчислювальна складність – для інтерполяції потрібно використовувати усі відліки, що не виправдано, наприклад, при апроксимації сигналу на локальних інтервалах визначення.

Загальновідомо [8; 9], що будь-яка функція (сигнал) $p(t)\in L_2(\mathbb{R})$ має єдино можливий розклад у ряд

$$p(t)=\sum_{i\in\mathbb{Z}} c_i\varphi(t-ih),$$

де $\varphi(t)$ – функції, що є базисом Рисса в $L_2(\mathbb{R})$, тобто:

$$0<C_{\min}\|c\|_{l_2(\mathbb{Z})}\le \overbrace{\left\|\sum_{i\in\mathbb{Z}} c_i\varphi(t-ih)\right\|_{L_2(\mathbb{R})}}^{\|p(t)\|_{L_2(\mathbb{R})}}\le C_{\max}\|c\|_{l_2(\mathbb{Z})}<\infty,$$

де $\{c_i\}\in l_2(\mathbb{Z})$ – коефіцієнти розкладу; $C_{\min}$, $C_{\max}$ – деякі константи.

З іншого боку доведено [9, с.148-149], що базис *B*-сплайнів є базисом Рисса, отже

$$p(t)=\sum_{i\in\mathbb{Z}} c_i B_{r,h}(t-ih),\ r\ge 1, \tag{8}$$

де c_i, $i\in\mathbb{Z}$ визначаються із інтерполяційних умов та розв'язку відповідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$p(t)=\sum_{i\in\mathbb{Z}} c_i^{(r)} B_{r,h}(t-ih)\Big|_{t=ih},\ r\ge 1,\ i\in\mathbb{Z}. \tag{9}$$

При цьому, зважаючи на скінченність носіїв d_r *B*-сплайнів, в кожному рядку визначника такої системи не рівними нулю буде лише r елементів (значень сплаййнів $B_{r,h}(t)$) та розташовані такі елементи будуть уздовж головної діагоналі [1]. Останнє й забезпечує простоту обчислення коефіцієнтів інтерполяції.

З розв'язку системи (9) отримують фундаментальний сплайн

$$S_r(t)=\sum_{i\in\mathbb{Z}} c_i^{(r)} B_{r,h}(t-ih),\ r\ge 1,$$

що має інтерполяційні властивості. Вочевидь, послідовність $\left\{c_i^{(r)}\right\}$ не є скінченою. Проте, показано [9, с.181-182], що члени послідовності $\left\{c_i^{(r)}\right\}$ спадають до нуля експоненціально швидко при $i \to \pm\infty$. Це означає, що й фундаментальний сплайн $S_r(t)$ також прямує до нуля з тією ж швидкістю при $t \to \pm\infty$, що забезпечує збіжність для $\forall x \in \mathbb{R}$ сплайн-рядів

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} p(ih) S_r(t-ih),\ r \geq 1.$$

В реальній практиці можуть виникати ситуації, коли інтерполяція сигналу саме за виразом (8) є недоречною. Отже, поставимо за мету у подальшому викладенні подати можливість апроксимації $p(t)$ за використанням моделей на основі лінійних комбінацій *B*-сплайнів (4), близьких до інтерполяційних у середньому.

Виклад основного матеріалу. Зазвичай при фіксації аналогового сигналу має місце наступне. Нехай $\phi(t)$ – функція імпульсного відклику системи, що реєструє сигнал $p(t)$. В силу суто технічних властивостей систем реєстрації, результатом згортки сигналу та функції відклику буде значення, усереднене на інтервалі дискретизації, зокрема:

$$(p * \phi)(ih) = \frac{1}{h}\int_{ih-\frac{h}{2}}^{ih+\frac{h}{2}} p(t)\phi(t-ih)\,dt = \overline{p}_i.$$

Тоді цифровий сигнал може мати таке подання:

$$p_i = \overline{p}_i + \varepsilon_i,\ i \in \mathbb{Z}, \tag{10}$$

де ε_i – випадкова вада. Стосовно вади ε_i, $i \in \mathbb{Z}$ можна припускати будь-який розподіл, проте за замовченням вважають, що має місце розподіл Гауса з нульовим математичним сподіванням, дисперсією σ_ε^2 та функцією щільності

$$f(\varepsilon; 0, \sigma_\varepsilon) = \frac{1}{\sigma_\varepsilon\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma_\varepsilon^2}}. \tag{11}$$

Таким чином, при використанні даних (10) для побудови інтерполяції (8) на основі (9) приходимо до хибного оцінювання сигналу. Причому, згідно нерівності Чебишева (для довільного $\upsilon > 0$ виконується $P\left\{\left|\xi - E\{\xi\}\right| \geq \upsilon\right\} \leq \dfrac{D\{\xi\}}{\upsilon^2}$), похибка буде тим більшою, чим більшою є дисперсія σ_ε^2. Отже, виникає задача при побудові моделі сигналу використовувати апроксимації, що враховують випадкову природу даних, зокрема, оператори інтерполяційні в середньому або близькі до інтерполяційних у середньому.

Наприклад, для *B*-сплайнів другого порядку в роботі [3] для апроксимації функції $p(t)$ за значеннями типу (10) у вузлах розбиття Δ_h, подано такі сплайни, близькі до інтерполяційних у середньому:

$$S_{2,0}(p,t)=\sum_{i\in\mathbb{Z}} p_i B_{2,h}\left(t-(i+0,5)h\right), \qquad (12)$$

$$S_{2,1}(p,t)=\sum_{i\in\mathbb{Z}}\left(p_i-\tfrac{1}{6}\Delta^2 p_i\right)B_{2,h}\left(t-(i+0,5)h\right), \qquad (13)$$

$$S_{2,2}(p,t)=\sum_{i\in\mathbb{Z}}\left(p_i-\tfrac{1}{6}\Delta^2 p_i+\tfrac{1}{36}\Delta^4 p_i\right)B_{2,h}\left(t-(i+0,5)h\right), \qquad (14)$$

де $\Delta^{2u} p_i=\Delta^{2u-2} p_{i+1}-2\Delta^{2u-2} p_i+\Delta^{2u-2} p_{i-1},\ u=1,2,\ldots$

Якщо обрати в якості моделі сигналу $p(t)$ сплайни (13), (14), то така оцінка за певних умов є фактично асимптотично точною. Зокрема, якщо довільна функція $f(t)$ неперервна на деякому відрізку $[a,b]$, то

$$\|f(t)\|_{C[a,b]}=\|f(t)\|_{L_\infty(a,b)},$$

де $C[a,b]$ – простір неперервних на $[a,b]$ функцій $f(t)$ з нормою

$$\|f(t)\|_{C[a,b]}=\max_{a\le t\le b}|f(t)|.$$

Тоді, припускаючи, що $p(t)\in C^3$, то при $h\to 0$ буде вірно наступне [8]:

$$\|p(t)-S_{2,u}(p,t)\|_C\le\frac{h^3}{12\sqrt{3}}\|p^{(3)}(t)\|_C+\varepsilon\|S_{2,u}(p,t)\|_C+o\left(h^3\right),\ u=1,2,$$

де $|\varepsilon_i|<\varepsilon$, $i\in\mathbb{Z}$ та $\|S_{r,u}(p,t)\|=\sup_{|\varepsilon_i|}\max_t|S_{r,u}(\varepsilon,t)|$, $r\ge 1$ – норма сплайн-оператора $S_{r,u}(p,t)$ і при цьому

$$\|S_{2,1}(p,t)\|_C=\frac{4}{3}\|p(t)\|_C, \qquad \|S_{2,2}(p,t)\|_C=\frac{3}{2}\|p(t)\|_C.$$

Похибка апроксимації може бути ще меншою, якщо за модель обрати, наприклад таку лінійну комбінацію *B*-сплайнів четвертого порядку [4]:

$$S_{4,2}(p,t)=\sum_{i\in Z}\left(p_i-\frac{1}{4}\Delta^2 p_i+\frac{13}{240}\Delta^4 p_i\right)B_{4,h}\left(t-(i+0,5)h\right). \qquad (15)$$

Зокрема, при $h \to 0$ для довільної функції $p(t) \in C^5$ має місце:

$$\left\| p(t) - S_{4,2}(p,t) \right\|_C \le \frac{h^4}{280} \left\| p^{(4)}(t) \right\|_C + \varepsilon \left\| S_{4,2}(p,t) \right\|_C + o\left(h^5\right),$$

де $$\left\| S_{4,2}(p,t) \right\|_C = \frac{697}{480} \left\| p(t) \right\|_C .$$

Фактично відмовляючись при моделюванні сигналу $p(t)$ від виконання інтерполяційних умов, використання виразів (13) – (15) дозволяє обійтись без розв'язання системи рівнянь (9). Якщо ж подати зазначені сплайни у явному вигляді, отримаємо формули для локальної апроксимації у вигляді поліному відповідного ступеня. Наприклад, для $S_{2,1}(p,t)$ має місце такий вираз, що неважко одержати, підставивши (5) в (13):

$$S_{2,1}(p,t) = \frac{1}{48}\Big(-(1-x)^2 p_{i-2} + \left(2 - 16x + 10x^2\right) p_{i-1} + \left(46 - 18x^2\right) p_i + \\ + \left(2 + 16x + 10x^2\right) p_{i+1} - (1+x)^2 p_{i+2} \Big), \; i \in \mathbb{Z}, \tag{16}$$

де $$x = 2\big(t - (i + 0{,}5)h\big)/h, \; |x| \le 1. \tag{17}$$

Якщо ж в якості апроксимації сигналу обрати вираз (12) або будь-яку іншу комбінацію *B*-сплайнів такого типу:

$$S_{r,0}(p,t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} p_i B_{r,h}(t - ih), \; r \ge 2, \tag{18}$$

то отримаємо модель з властивостями імпульсного нерекурсивного низькочастотного фільтру [5]. Зокрема, в роботі [9, стор.102], приведено доведення, що як і функція Гауса, будь-який *B*-сплайн порядку вище першого може бути використаний для визначення коротковіконного перетворення Фур'є (КВПФ). Отже, якщо $B_r(t)$, $r \ge 2$ – *B*-сплайн порядку r, то

$$\hat{B}_r(\omega) = \left(\frac{1 - e^{i\omega}}{i\omega} \right)^r = e^{-ir\omega} \left(\frac{\sin(\omega/2)}{(\omega/2)} \right)^r$$

або так (як в роботі [8]):

$$\hat{B}_r(\omega) = \left(\frac{e^{i\omega/2} - e^{-i\omega/2}}{i\omega} \right)^{r+1} = \left(\frac{\sin(\omega/2)}{(\omega/2)} \right)^{r+1}. \tag{19}$$

Для прикладу, згідно (19) подамо (рис.2) графіки частотних характеристик *B*-сплайнів нульового, другого та п'ятого порядків.

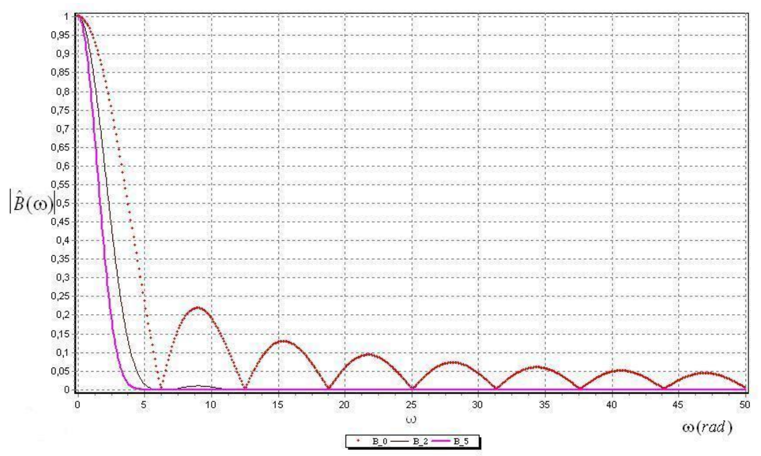

Рис.2. Частотні характеристики B-сплайнів
нульового, другого та п'ятого порядків

Ввидно (рис.3), що вже починаючи з порядку $r = 5$ і B-сплайн, і гаусіан в частотній області фактично не відрізняються, при цьому обрахунок B-сплайну п'ятого порядку [12] потребує менше обчислювальних затрат.

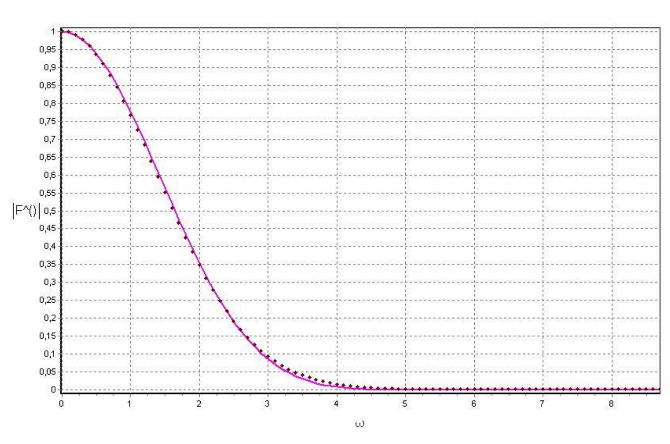

Рис.3. B-сплайн п'ятого порядку (сполошна лінія) та
гаусіан (крапки) з $\sigma = 0,725$

Якщо є потреба в отриманні цифрового низькочастотного фільтру, то достатньо в моделі (18) визначити значення сплайну у вузлах розбиття

Δ_h [13]. Для $r=2$ можна розгорнуто записати $S_{2,0}(p,t)$ так:

$$S_{2,0}(p,t)=\frac{1}{8}\Big((1-x)^2 p_{i-1}+\left(6-2x^2\right)p_i+(1+x)^2 p_{i+1}\Big), \quad i\in\mathbb{Z}.$$

Якщо покласти в (17) $x=0$ отримаємо:

$$S_{2,0}(p,ih)=\left(p_{i-1}+6\cdot p_i+p_{i+1}\right)/8, \qquad i\in\mathbb{Z},$$

або ж результат низькочастотної фільтрації на основі фільтру можемо записати так:

$$pн_i^{\left(S_{2,0}\right)}=\sum_{j=i-1}^{i+1} p_j\cdot\gamma^{(2,0)}{}_{j-i}, \qquad i\in\mathbb{Z},$$

де $\gamma^{(2,0)}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}1\\6\\1\end{pmatrix}$

відповідна маска низькочастотного фільтру. Для прикладу при $r=5$ має місце такий низькочастотний фільтр:

$$pн_i^{\left(S_{5,0}\right)}=\sum_{j=i-2}^{i+2} p_j\cdot\gamma^{(5,0)}{}_{j-i}, \qquad i\in\mathbb{Z},$$

де $\gamma^{(5,0)}=\frac{1}{120}\begin{pmatrix}1\\26\\66\\26\\1\end{pmatrix}.$

Ефективність фільтрації згідно моделі (18) за даними (10) при відносно значних величинах параметра σ в (11) можна підвищити якщо робити фільтр рекурсивним. З іншого боку за умови стаціонарності сигналу $p(t)$ (або, принаймні, локальної стаціонарності) вплив похибки можна практично нівелювати шляхом локального усереднення значень відліків p_i, $i\in\mathbb{Z}$ на інтервалах довжиною $\tilde{h}=N\cdot h$ (не зменшуючи загальності нехай N кратне двом):

$$\tilde{p}_{\tilde{i}}=\frac{1}{N+1}\sum_{j=-N/2}^{N/2} p_{i-j}=\frac{1}{N+1}\left(\sum_{j=-N/2}^{N/2}\overline{p}_{i-j}+\sum_{j=-N/2}^{N/2}\varepsilon_{i-j}\right), \qquad (20)$$

$$\tilde{i}=(N+1)\cdot i,\ i\in\mathbb{Z}.$$

Вочевидь, чим більшою є величина N, тим гарантовано ближчою до нуля є величина

$$\overline{\varepsilon}_{\tilde{i}} = \frac{1}{N+1} \sum_{j=-N/2}^{N/2} \varepsilon_{i-j} ,$$

(як оцінка математичного сподівання випадкової величини розподіленої за стандартним нормальним розподілом). З іншого боку оцінка $\overline{\varepsilon}_{\tilde{i}}$ є незсуненою за умови симетричності закону розподілу вади, тому в реальній практиці обчислень цілком прийнятним, з точки зору близькості до нуля, може бути й відносно невеликі значення величини N. Якщо обрати за α величину ймовірності того, що отримана на будь-якому з $\tilde{i}$-х інтервалів усереднення величина $\overline{\varepsilon}_{\tilde{i}}$ статистично відмінна від нуля, то тоді (згідно t-тесту для перевірки гіпотези $\mathrm{H}_0 : \overline{\varepsilon}_{\tilde{i}} = 0,\ \tilde{i} = (N+1)\cdot i,\ i \in \mathbb{Z}$) з ймовірністю $1-\alpha$ можна нехтувати впливом похибки після інтервального усереднення за даними (10) коли виконується така нерівність:

$$\left| \frac{\overline{\varepsilon}_{\tilde{i}}}{\sigma_\varepsilon} \sqrt{N+1} \right| \le t_{\alpha/2,\nu} ,$$

де $t_{\alpha/2,\nu}$ – квантиль t-розподілу Стьюдента; $\nu = N$ – кількість степенів вільності. Останній вираз засвідчує, що кількість даних усереднення має бути меншою при меншій величині σ_ε. І навпаки, при значній варіабельності цифрового сигналу ширина $\tilde{h}$ інтервалу усереднення має бути більшою.

Модель, аналогічна (18) за даними (20) така:

$$S_{r,0}(p,t) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \tilde{p}_i B_{r,h}\left(t - i\tilde{h}\right),\ r \ge 2 ,$$

при цьому похибку апроксимації сигналу $p(t)$ можна оцінити з урахуванням довжини $\tilde{h}$ інтервалів усереднення.

Висновок. Проведені дослідження дають право рекомендувати поліноміальні сплайни на основі *B*-сплайнів, близькі до інтерполяційних у середньому для побудови моделей аналогових сигналів з кінцевою енергією. Подібне ствердження підкріплене як теоретичним обґрунтуванням, так і практичними уявленнями про природу сигналу та його цифрового подаяння, на основі котрого відбувається апроксимація. Обчислювальна простота розглянутих сплайн-операторів дозволяє рекомендувати їх для реалізації у програмному забезпеченні обробки цифрових сигналі, в тому числі для систем, що функціонують у режимі реального часу.

Подальша робота може бути спрямована на отримання швидкодіючих обчислювальних схем та нових лінійних операторів на основі таких сплайнів, а також на їх експериментальне дослідження при обробці цифрових сигналів.

Література.

1. Корнейчук Н.П. Сплайны в теории приближения. -М.: Наука, 1984.- 351 с.

2. Де Бор К. Практическое руководство по сплайнам.- М.: Радио и связь, 1985.- 303 с.

3. Лигун А.А., Шумейко А.А. Асимптотические методы восстановления кривых.- К.: ИМ НАНУ, 1997.- 358 с.

4. Приставка П.О. Поліномаільні сплайни при обробці даних. – Д.: Вид-во Дніпропетр. ун-ту, 2004. – 236 с.

5. Василенко В.А., Зюзин М.В., Ковалков А.В. Сплайн-функции и цифровые фильтры (под ред. А.С. Алексеева). – Новосибирск: Вычислительный центр СО АН СССР, 1984. – 141 с.

6. Шелевицький І.В. Методи та засоби сплайни-технології обробки сигналів складної форми. – Кривий Ріг: Європейський університет, 2002 р. – 304 с.

7. Денисюк В.П., Марченко Б.Г. Сплайны и их приложения в задачах моделирования и обработки вычислительных сигналов.- Киев: КПИ, 1995. – 246 с.

8. M. Unser, "Splines: A Perfect Fit for Signal and Image Processing," *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 16, no. 6, pp. 22-38, 1999.

9. Чуи Ч. Введение в вэйвлеты // Пер. с. англ. –М.: Мир, 2001. –412 с.

10. Ярославский Л.П. Введение в цифровую обработку изображений. – М.: Сов. Радио, 1979. – 312с.

11. Лигун А.А., Кармазина В.В. О восстановлении эмпирической функции плотности распределения с помощью гистосплайнов второго порядка/ Днепродзержинский индустр. ин-т.- Днепродзержинск, 1989.-30 с.- Деп. в УкрНИИНТИ 8.06.89, N1559- Ук89.

12. Приставка П.О., Чолишкіна О.Г. Дослідження *B*-сплайну п’ятого порядку та їх лінійної комбінації / Математичне моделювання. – ДДТУ, Дніпродзержинськ. – 2007. - №1(16). - С.14-17.

13. Приставка П.О. Обчислювальні аспекти застосування поліноміальних сплайнів при побудові фільтрів / Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій.- Д.: Вид-во Дніпропетр. ун-ту.- 2006. -Т.10. – С.3-14.