Математичне моделювання. – 2008. - №1(18). - С.9-12

ПОПОВНЕННЯ ЗІ ЗГЛАДЖУВАННЯМ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ ВІДЛІКІВ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ НА ОСНОВІ СПЛАЙНІВ

П.О.ПРИСТАВКА

Національний авіаційний університет

Для чотирикратного поповнення зі згладжуванням послідовностей відліків гладких функцій двох змінних подано лінійні оператори, отримані за використанням двовимірних локальних поліноміальних сплайнів на основі *B*-сплайнів, що є близькими до інтерполяційних у середньому.

Для четырёхкратного пополнения со сглаживанием последовательностей отсчётов гладких функций двух переменных подано линейные операторы, полученные с использованием двумерных локальных полиномиальных сплайнов на основе *B*-сплайнов, близких к интерполяционным в среднем.

This article is the solution of practical research of the polynomial splines of two variables based on the *B*-splines that, on average, are related to the interpolar. These splines allow us to get simple calculating schemes which are convenient for the practical application.

Постановка проблеми. Розвиток інформаційних технологій стимулює удосконалення математичного апарату опрацювання дискретних даних. Порівняно громіздкі класичні методи апроксимації гладких функцій за подібними даними все менше задовольняють розробників програмного та апаратного забезпечення розв'язку задач стиснення та відтворення зображень, опрацювання сигналів, тощо. Так при обробці растрових зображень з випадковою вадою серед інших, може виникати завдання збільшення розміру вихідного зображення з вимогою придушення білого шуму. Зазвичай, подібна операція супроводжується обчисленнями на великих обсягах даних, представленими результатом оцифровування, що містять файли графічних форматів. Наприклад, якісний цифрований знімок для друку фотографії формату А4-А3 містить приблизно 4 мегапікселі, а враховуючи, що більшість зображень виконано у кольоровому просторі sRGB, останню цифру слід потроїти за рахунок розкладу на складові червоного, зеленого та синього. При проведенні аерофотозйомки кількість пікселів цифрованого зображення на порядок може перевищувати вказаний. Тому, зважаючи на зазначене, при масштабуванні растру актуальною є задача вибору математичного забезпечення обробки, яке відповідало б вимогам адекватної апроксимації та швидкодії обчислень одночасно.

Аналіз досліджень та постановка задачі. Останні кілька десятиріч розвиток отримали методи, що базуються на обчислювальному аспекті, зокрема вейвлети та процедури, основані на бінарному поповненні послідовностей відліків гладких функцій. Що до останніх, можна зазначити можливість їх одержання на підставі методів сплайн-апроксимації, зокрема, з використанням поліноміальних сплайнів, визначених на локальних носіях, для яких і обчислювальний апарат і дослідження проведено досить розлого.

Задачі відтворення гладких функцій на основі лінійних комбінацій *B*-сплайнів висвітлено у досить багатьох роботах І.Шоенберга, К.Де Бора, М.П.Корнійчука та ін. Увагу поліноміальним сплайнам, визначеним на локальних носіях, близьким до інтерполяційних у середньому, приділено А.О.Лигуном [1] та у ряді авторських робіт, зокрема [2]. Що до методів, побудованих на бінарному поповненні послідовностей, то звертають увагу роботи [3-7], в тому числі і за усередненими на інтервалах розбиття значеннями гладких функцій як однієї, так і двох змінних [2; 8-10]. Стосовно відтворення функцій за усередненими значеннями, визначеними на рівномірних розбиттях можна зазначити наступне: вибір в якості апарату апроксимації операторів, що є близькими до інтерполяційних у середньому обумовлений більш високою стійкістю оцінки наближення за даними, що є різного роду результатами вимірювань [1; 2], в першу чергу це стосується даних з вадою.

Поставимо за мету у подальшому викладенні подати процедури чотирикратного поповнення зі згладжуванням двовимірних послідовностей відліків гладких функцій (двократного масштабування) на підставі алгоритмізації обчислювальних схем двовимірних сплайнів на основі *B*-сплайнів. Слід зазначити, що в роботах [2; 10] задача масштабування на площині вирішується за рахунок ітераційних процедур бінарного поповнення двовимірних послідовностей. Проте, нескладно показати, що обчислювальна складність такого підходу не може в повній мірі задовольняти розробників програмного забезпечення з вимогою функціонування в режимі реального часу (за рахунок додаткових ітераційних циклів зростає кількість простіших арифметичних операцій).

Виклад основного матеріалу. Нехай маємо розбиття площини на прямокутники з кроками h_t, h_q вздовж відповідних осей, отже, задано масив точок

$$\left\{\left(t_{i,0};q_{j,0}\right)\right\}=\left\{\left(ih_t;jh_q\right)\right\}_{i,j\in\mathbb{Z}},$$

кожному елементу якого поставлено у відповідність усереднене на прямокутній області

$$\left\{\left(t_{i,0}-0,5h_t;q_{j,0}-0,5h_q\right);\left(t_{i,0}+0,5h_t;q_{j,0}+0,5h_q\right)\right\}$$

значення деякої

$$p(t,q)\in C^{k_1,k_2},\ k_1,k_2=2,3,\ldots$$

функції у вигляді масиву $\left\{p_{i,j,0}\right\}_{i,j\in\mathbb{Z}}$.

Для чотирикратного рекурентного поповнення кількості членів послідовності $\left\{p_{i,j,0}\right\}_{i,j\in\mathbb{Z}}$ достатньо на кожному κ-му ($\kappa=1,2,\ldots$) кроці рекурсії мати нову, згущену сітку вузлів

$$\left\{(t_{2i,\kappa},q_{2j,\kappa}),(t_{2i+1,\kappa},q_{2j,\kappa}),\right.$$
$$\left.(t_{2i,\kappa},q_{2j+1,\kappa}),(t_{2i+1,\kappa},q_{2j+1,\kappa})\right\}_{i,j\in\mathbb{Z}},$$

які визначаються за формулами:

$$t_{2i,\kappa}=t_{i,\kappa-1},$$
$$q_{2j,\kappa}=q_{j,\kappa-1}$$
$$t_{2i+1,\kappa}=\frac{t_{i,\kappa-1}+t_{i+1,\kappa-1}}{2}=t_{i,\kappa-1}+\frac{h_t}{2^{\kappa+1}};$$

$$q_{2j+1,\kappa} = \frac{q_{j,\kappa-1} + q_{j+1,\kappa-1}}{2} = q_{j,\kappa-1} + \frac{h_q}{2^{\kappa+1}},$$

причому

$$\begin{aligned} p_{2i,2j,\kappa} &= A\left(p^{\kappa-1,i,j}\right), \\ p_{2i+1,2j,\kappa} &= B\left(p^{\kappa-1,i,j}\right), \\ p_{2i,2j+1,\kappa} &= C\left(p^{\kappa-1,i,j}\right), \\ p_{2i+1,2j+1,\kappa} &= D\left(p^{\kappa-1,i,j}\right),\ i,j \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \tag{1}$$

де

$$A\left(p^{\kappa-1,i,j}\right);\ B\left(p^{\kappa-1,i,j}\right);\ C\left(p^{\kappa-1,i,j}\right);\ D\left(p^{\kappa-1,i,j}\right)$$

- лінійні функціонали, що побудовано на даних попереднього кроку рекурсії.

Наприклад, функціонали (1) неважко отримати за використанням сплайну $S_{4,0}(p,t,q)$ [2] та його явного вигляду, якщо покласти, відповідно:

$$(x=0,\ y=0),\ (x=1,\ y=0),$$
$$(x=0,\ y=1),\ (x=1,\ y=1),$$

де

$$x = \frac{2}{h_t}\left(t - (i+0{,}5)h_t\right), \qquad y = \frac{2}{h_q}\left(q - (j+0{,}5)h_q\right).$$

В результаті отримаємо:

$$\begin{aligned} A^{(S_{4,0})}(\cdot) = p^{(S_{4,0})}_{2i,2j,\kappa} = \frac{1}{147456}\big(& p_{i-2,j-2,\kappa-1} + 76p_{i-1,j-2,\kappa-1} + \\ & +230p_{i,j-2,\kappa-1} + 76p_{i+1,j-2,\kappa-1} + p_{i+2,j-2,\kappa-1} + 76p_{i-2,j-1,\kappa-1} + \\ & +5776p_{i-1,j-1,\kappa-1} + 17480p_{i,j-1,\kappa-1} + 5776p_{i+1,j-1,\kappa-1} + \\ & +76p_{i+2,j-1,\kappa-1} + 230p_{i-2,j,\kappa-1} + 17480p_{i-1,j,\kappa-1} + \\ & +52900p_{i,j,\kappa-1} + 17480p_{i+1,j,\kappa-1} + 230p_{i+2,j,\kappa-1} + \\ & +76p_{i-2,j+1,\kappa-1} + 5776p_{i-1,j+1,\kappa-1} + 17480p_{i,j+1,\kappa-1} + \\ & +5776p_{i+1,j+1,\kappa-1} + 76p_{i+2,j+1,\kappa-1} + p_{i-2,j+2,\kappa-1} + 76p_{i-1,j+2,\kappa-1} + \\ & +230p_{i,j+2,\kappa-1} + 76p_{i+1,j+2,\kappa-1} + p_{i+2,j+2,\kappa-1}\big), \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} B^{(S_{4,0})}(\cdot) = p^{(S_{4,0})}_{2i+1,2j,\kappa} = \frac{1}{9216}\big(& p_{i-1,j-2,\kappa-1} + 11p_{i,j-2,\kappa-1} + \\ & +11p_{i+1,j-2,\kappa-1} + p_{i+2,j-2,\kappa-1} + 76p_{i-1,j-1,\kappa-1} + 836p_{i,j-1,\kappa-1} + \\ & +836p_{i+1,j-1,\kappa-1} + 76p_{i+2,j-1,\kappa-1} + 230p_{i-1,j,\kappa-1} + 2530p_{i,j,\kappa-1} + \\ & +2530p_{i+1,j,\kappa-1} + 230p_{i+2,j,\kappa-1} + 76p_{i-1,j+1,\kappa-1} + 836p_{i,j+1,\kappa-1} + \\ & +836p_{i+1,j+1,\kappa-1} + 76p_{i+2,j+1,\kappa-1} + p_{i-1,j+2,\kappa-1} + 11p_{i,j+2,\kappa-1} + \\ & +11p_{i+1,j+2,\kappa-1} + p_{i+2,j+2,\kappa-1}\big), \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} C^{(S_{4,0})}(\cdot) = p^{(S_{4,0})}_{2i,2j+1,\kappa} = \frac{1}{9216}\big(& p_{i-2,j-1,\kappa-1} + 76p_{i-1,j-1,\kappa-1} + \\ & +230p_{i,j-1,\kappa-1} + 76p_{i+1,j-1,\kappa-1} + p_{i+2,j-1,\kappa-1} + 11p_{i-2,j,\kappa-1} + \\ & +836p_{i-1,j,\kappa-1} + 2530p_{i,j,\kappa-1} + 836p_{i+1,j,\kappa-1} + 11p_{i+2,j,\kappa-1} + \\ & +11p_{i-2,j+1,\kappa-1} + 836p_{i-1,j+1,\kappa-1} + 2530p_{i,j+1,\kappa-1} + \\ & +836p_{i+1,j+1,\kappa-1} + 11p_{i+2,j+1,\kappa-1} + p_{i-2,j+2,\kappa-1} + 76p_{i-1,j+2,\kappa-1} + \\ & +230p_{i,j+2,\kappa-1} + 76p_{i+1,j+2,\kappa-1} + p_{i+2,j+2,\kappa-1}\big), \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} D^{(S_{4,0})}(\cdot) = p^{(S_{4,0})}_{2i+1,2j+1,\kappa} = \frac{1}{576}\big(& p_{i-1,j-1,\kappa-1} + 11p_{i,j-1,\kappa-1} + \\ & +11p_{i+1,j-1,\kappa-1} + p_{i+2,j-1,\kappa-1} + 11p_{i-1,j,\kappa-1} + 121p_{i,j,\kappa-1} + \\ & +121p_{i+1,j,\kappa-1} + 11p_{i+2,j,\kappa-1} + 11p_{i-1,j+1,\kappa-1} + 121p_{i,j+1,\kappa-1} + \\ & +121p_{i+1,j+1,\kappa-1} + 11p_{i+2,j+1,\kappa-1} + p_{i-1,j+2,\kappa-1} + 11p_{i,j+2,\kappa-1} + \\ & +11p_{i+1,j+2,\kappa-1} + p_{i+2,j+2,\kappa-1}\big). \end{aligned} \tag{5}$$

В стислому вигляді функціонали (2)-(5) можна подати так:

$$\begin{aligned} p^{(S_{4,0})}_{2i,2j,\kappa} &= \sum_{i_t=i-2}^{i+2} \sum_{j_q=j-2}^{j+2} \gamma^{(S_{4,0})}_{A,i_t,j_q} p_{i_t,j_q,\kappa-1}, \\ p^{(S_{4,0})}_{2i+1,2j,\kappa} &= \sum_{i_t=i-2}^{i+2} \sum_{j_q=j-2}^{j+2} \gamma^{(S_{4,0})}_{B,i_t,j_q} p_{i_t,j_q,\kappa-1}, \\ p^{(S_{4,0})}_{2i,2j+1,\kappa} &= \sum_{i_t=i-2}^{i+2} \sum_{j_q=j-2}^{j+2} \gamma^{(S_{4,0})}_{C,i_t,j_q} p_{i_t,j_q,\kappa-1}, \\ p^{(S_{4,0})}_{2i+1,2j+1,\kappa} &= \sum_{i_t=i-2}^{i+2} \sum_{j_q=j-2}^{j+2} \gamma^{(S_{4,0})}_{D,i_t,j_q} p_{i_t,j_q,\kappa-1}, \end{aligned} \tag{6}$$

де

$$\gamma^{(S_{4,0})}_A = \frac{1}{147456}\begin{pmatrix} 1 & 76 & 230 & 76 & 1 \\ 76 & 5776 & 17480 & 5776 & 76 \\ 230 & 17480 & 52900 & 17480 & 230 \\ 76 & 5776 & 17480 & 5776 & 76 \\ 1 & 76 & 230 & 76 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\gamma^{(S_{4,0})}_B = \frac{1}{9216}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 76 & 230 & 76 & 1 \\ 11 & 836 & 2530 & 836 & 11 \\ 11 & 836 & 2530 & 836 & 11 \\ 1 & 76 & 230 & 76 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\gamma^{(S_{4,0})}_C = \frac{1}{9216}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 11 & 11 & 1 \\ 0 & 76 & 836 & 836 & 76 \\ 0 & 230 & 2530 & 2530 & 230 \\ 0 & 76 & 836 & 836 & 76 \\ 0 & 1 & 11 & 11 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\gamma^{(S_{4,0})}_D = \frac{1}{576}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 11 & 11 & 1 \\ 0 & 11 & 121 & 121 & 11 \\ 0 & 11 & 121 & 121 & 11 \\ 0 & 1 & 11 & 11 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вирази на зразок (2-5) та (6) дозволяють навести подання функціоналів (1), які отримані за використанням сплайнів [2]

$$S_{2,0}(p,t,q),\ S_{3,0}(p,t,q),\ S_{5,0}(p,t,q),$$

що мають згладжувальні властивості:

$$p^{(2,0)}_{a,b,\kappa} = \sum_{i_t=i-1}^{i+1} \sum_{j_q=j-1}^{j+1} \gamma^{(2,0)}_{\Lambda,i_t,j_q} p_{i_t,j_q,\kappa-1}, \tag{7}$$

де

$$\Lambda = \left[\begin{aligned} & A: a=2i, b=2j, \\ & B: a=2i+1, b=2j, \\ & C: a=2i, b=2j+1, \\ & D: a=2i+1, b=2j+1; \end{aligned}\right. \tag{8}$$

$$\gamma^{(S_{2,0})}_A = \frac{1}{64}\begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 6 & 36 & 6 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\gamma^{(S_{2,0})}_B = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\gamma^{(S_{2,0})}_C = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\gamma_D^{(S_{2,0})} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$p_{a,b,\kappa}^{(3,0)} = \sum_{i_t=i-1}^{i+2}\sum_{j_q=j-1}^{j+2}\gamma_{\Lambda,i_t,j_q}^{(3,0)} p_{i_t,j_q,\kappa-1}, \qquad (9)$$

де

Λ - визначається з (8);

$$\gamma_A^{(S_{3,0})} = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 16 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\gamma_B^{(S_{3,0})} = \frac{1}{288}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 23 & 92 & 23 & 0 \\ 23 & 92 & 23 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\gamma_C^{(S_{3,0})} = \frac{1}{288}\begin{pmatrix} 1 & 23 & 23 & 1 \\ 4 & 92 & 92 & 4 \\ 1 & 23 & 23 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\gamma_D^{(S_{3,0})} = \frac{1}{2304}\begin{pmatrix} 1 & 23 & 23 & 1 \\ 23 & 529 & 529 & 23 \\ 23 & 529 & 529 & 23 \\ 1 & 23 & 23 & 1 \end{pmatrix};$$

$$p_{a,b,\kappa}^{(5,0)} = \sum_{i_t=i-2}^{i+3}\sum_{j_q=j-2}^{j+3}\gamma_{\Lambda,i_t,j_q}^{(5,0)} p_{i_t,j_q,\kappa-1}, \qquad (10)$$

де

Λ - визначається з (8);

$$\gamma_A^{(S_{5,0})} = \frac{1}{14400}\begin{pmatrix} 1 & 26 & 66 & 26 & 1 & 0 \\ 26 & 676 & 1716 & 676 & 26 & 0 \\ 66 & 1716 & 4356 & 1716 & 66 & 0 \\ 26 & 676 & 1716 & 676 & 26 & 0 \\ 1 & 26 & 66 & 26 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\gamma_B^{(S_{5,0})} = \frac{1}{460800}\times$$
$$\times\begin{pmatrix} 1 & 26 & 66 & 26 & 1 & 0 \\ 237 & 6162 & 15642 & 6162 & 237 & 0 \\ 1682 & 43732 & 111012 & 43732 & 1682 & 0 \\ 1682 & 43732 & 111012 & 43732 & 1682 & 0 \\ 237 & 6162 & 15642 & 6162 & 237 & 0 \\ 1 & 26 & 66 & 26 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\gamma_C^{(S_{5,0})} = \frac{1}{460800}\times$$
$$\times\begin{pmatrix} 1 & 237 & 1682 & 1682 & 237 & 1 \\ 26 & 6162 & 43732 & 43732 & 6162 & 26 \\ 66 & 15642 & 111012 & 111012 & 15642 & 66 \\ 26 & 6162 & 43732 & 43732 & 6162 & 26 \\ 1 & 237 & 1682 & 1682 & 237 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\gamma_D^{(S_{5,0})} = \frac{1}{14745600}\times$$
$$\times\begin{pmatrix} 1 & 237 & 1682 & 1682 & 237 & 1 \\ 237 & 56169 & 398634 & 398634 & 56169 & 237 \\ 1682 & 398634 & 2829124 & 2829124 & 398634 & 1682 \\ 1682 & 398634 & 2829124 & 2829124 & 398634 & 1682 \\ 237 & 56169 & 398634 & 398634 & 56169 & 237 \\ 1 & 237 & 1682 & 1682 & 237 & 1 \end{pmatrix}.$$

Висновки. Відзначимо, що для сплайнів $S_{r,0}(p,t,q)$, $r = 2,3,4,5$ ступінь згладжування зростає з ростом r [2], тому цей факт слід враховувати при реалізації відповідних обчислювальних схем, залежно від конкретних потреб. Стосовно обробки цифрованих зображень, з урахуванням вимоги швидкодії обчислювальних схем, цілком достатньо у відповідних автоматизованих системах реалізовувати функціонали (7), (9) при суттєвій деталізації об'єктів, привівши подібні для зменшення кількості простіших арифметичних операцій, функціонал (10) – наприклад, при обробці портретних знімків. Загалом, реалізація в програмному забезпеченні отриманих функціоналів показала, що при двократному збільшенні розміру растрового зображення формату А3, відповідна дія відбувається у режимі реального часу.

Подальші дослідження мають враховувати можливість модифікацій поданих лінійних функціоналів на основі сплайнів, близьких до інтерполяційних у середньому трьох змінних при опрацюванні послідовностей відліків функцій відповідної розмірності, а також взаємодію методів стиснення та відтворення інформації.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Лигун А.А., Шумейко А.А.* Асимптотические методы восстановления кривых. . –К.: ІМ НАН України, 1996. - 358 с.
2. *Приставка П.О.* Поліномаільні сплайни при обробці даних – Д.: Вид-во Дніпропетр. ун-ту, 2004. – 236 с.
3. *Dubuk S.* Interpolation through an Iterative Scheme. Journal of Math. An. and Appl., 1986, p.185-204.
4. *De Marchi S.* The Dyadic Iterative Interpolation Method and some extensions. TR nr. 10/94, University of Padua, 1994.
5. *Holschneider M.* Wavelets. An analysis Tool. Oxford. Oxford University Press, 1995.
6. *Лигун А.А., Шумейко А.А.* Исследования линейных операторов порожденных методами пополнения данных // Математичне моделювання, Діпродзержинськ, ДГТУ, 2 (5), 2000, с.11-19.
7. *Иванин Д.А., Лигун А.А.* Линейный метод восстановления поверхностей по её значениям в узлах квадратной решетки // Математичне моделювання, Діпродзержинськ, ДГТУ, 1 (6), 2001, с.8-12.
8. *Лигун А.А., Шумейко А.А., Голобородько П.Л.* О гарантированных оценках для линейных методов восстановления, основанных на бинарном расслоении // Математичне моделювання, Діпродзержинськ, ДГТУ, 2 (7), 2001, с.30-39.
9. *Лигун А.А., Шумейко А.А.* Об одном способе восстановления функций по средним значениям на равномерной сетке // Математичне моделювання, Діпродзержинськ, ДГТУ, 1 (6), 2001, с.16-17.
10. *Приставка П.О.* Поліноміальні сплайни в задачах бінарного поповнення / Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій.- Д.: Вид-во Дніпропетр. ун-ту.- 2003.-Т.7. –С.39-53.

Національний авіаційний університет, кафедра інформаційних технологій. Дата відправлення 20.02.2008. Поштовий індекс 03058.