**УДК 519.652:519.254**

П.О.Приставка, О.Г.Чолишкіна

# ДОСЛІДЖЕННЯ *B*-СПЛАЙНУ ШОСТОГО ПОРЯДКУ ТА ЇХ ЛІНІЙНОЇ КОМБІНАЦІЇ

**Отримано властивості *B*-сплайну шостого порядку, визначеного на рівномірному розбитті. Досліджено властивості поліноміального сплайну на основі *B*-сплайнів шостого порядку, що є близьким до інтерполяційного у середньому.**

**Постановка проблеми.** Зазвичай при фіксації аналогового сигналу має місце наступне. Нехай $\phi(t)$ – функція імпульсного відклику системи, що реєструє сигнал $p(t)$. В силу суто технічних властивостей систем реєстрації, результатом згортки сигналу та функції відклику буде значення, усереднене на інтервалі дискретизації, зокрема:

$$(p*\phi)(ih)=\frac{1}{h}\int_{ih-\frac{h}{2}}^{ih+\frac{h}{2}} p(t)\phi(t-ih)dt=\overline{p}_i .$$

Тоді цифровий сигнал може мати таке подання:

$$p_i=\overline{p}_i+\varepsilon_i,\ i\in\mathbb{Z}, \tag{1}$$

де $\varepsilon_i$ – випадкова вада. Стосовно вади $\varepsilon_i$, $i\in\mathbb{Z}$ можна припускати будь-який розподіл, проте за замовченням вважають, що має місце розподіл Гауса з нульовим математичним сподіванням та деякою дисперсією $\sigma_\varepsilon^2$. Тому в задачах обробки цифрових сигналів, що задані співвідношенням (1), в якості моделі $p(t)$ є потреба використовувати наближення з властивостями імпульсного нерекурсивного низькочастотного фільтру, наприклад, лінійні комбінації *B*-сплайнів, близькі до інтерполяційних у середньому [1].

Відомо [2; 3], що будь-який *B*-сплайн порядку вище першого може бути використаний для визначення коротковіконного перетворення Фур'є, при цьому вже починаючи з п'ятого порядку *B*-сплайн в частотній області фактично мало чим відрізняється від гаусіана, хоча обрахунок *B*-сплайну п’ятого порядку [4] потребує менше обчислювальних затрат. Саме тому актуальним є дослідження лінійних комбінацій *B*-сплайнів вищого порядку, ніж п’ятий: від подібних сплайнів варто очікувати більш високі згладжувальні властивості при відносно низькій обчислювальній складності.

**Аналіз досліджень та постановка задачі.** Задача відтворення гладких функцій на основі лінійних комбінацій *B*-сплайнів висвітлено у роботах І.Шоенберга, К.Де Бора, М.П.Корнійчука та ін. Увагу поліноміальним сплайнам, визначеним на локальних носіях, близьким до інтерполяційних у середньому, приділено А.О.Лигуном, О.А.Шумейко, В.В.Кармазіною [5 – 7] та у авторських дослідженнях [8].

Нехай з кроком $h > 0$ задано розбиття дійсної вісі $\Delta_h : t_i = ih$, $i \in Z$, у кожній точці якого отримано значення деякої неперервної функції $p(t) \in C^r$, $r \geq 2$, визначеної на $\mathbb{R}_1(-\infty;\infty)$. Вважають, що інформація про функцію $p(t)$, яка підлягає відтворенню, задано у вузлах розбиття $\Delta_h$ у вигляді інтеграла $\overline{p}_i = \frac{1}{h}\int\limits_{(i-0,5)h}^{(i+0,5)h} p(t)\,dt$, при цьому, істинне значення функції $p(t)$ у вузлах визначається аналогічно виразу (1).

Для апроксимації функції $p(t)$ за значеннями типу (1) у вузлах розбиття $\Delta_h$, вводяться такі поліноміальні сплайни на основі *B*-сплайнів, що є близькими до інтерполяційних у середньому:

$$S_{r,0}(p,t) = \sum_{i \in Z} p_i B_{r,h}\left(t - (i + 0,5)h\right),\ r = 2,4,$$

$$S_{r,0}(p,t) = \sum_{i \in Z} p_i B_{r,h}(t - ih),\ r = 3,5,$$

де *B*-сплайн $B_{r,h}(t)$ порядку $r$ ($r \geq 1$) визначається рекурентно наступним чином: якщо

$$B_{0,h}(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [-h/2; h/2], \\ 1, & t \in [-h/2; h/2], \end{cases}$$

то

$$B_{r,h}(t) = \frac{1}{h}\int\limits_{t-h/2}^{t+h/2} B_{r-1,h}(\tau)\,d\tau\,. \tag{2}$$

Наприклад, *B*-сплайн п’ятого порядку такий:

$$B_{5,h}(t)=\begin{cases} 0, & t\notin[-3h;3h], \\ \frac{1}{120}\left(3+\frac{t}{h}\right)^5, & t\in[-3h;-2h], \\ -\frac{1}{24}\left(\frac{t}{h}\right)^5-\frac{3}{8}\left(\frac{t}{h}\right)^4-\frac{5}{4}\left(\frac{t}{h}\right)^3-\frac{7}{4}\left(\frac{t}{h}\right)^2-\frac{5}{8}\left(\frac{t}{h}\right)+\frac{51}{120}, & t\in[-2h;-h], \\ \frac{1}{12}\left(\frac{t}{h}\right)^5+\frac{1}{4}\left(\frac{t}{h}\right)^4-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{h}\right)^2+\frac{11}{20}, & t\in[-h;0], \\ -\frac{1}{12}\left(\frac{t}{h}\right)^5+\frac{1}{4}\left(\frac{t}{h}\right)^4-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{h}\right)^2+\frac{11}{20}, & t\in[0;h], \\ \frac{1}{24}\left(\frac{t}{h}\right)^5-\frac{3}{8}\left(\frac{t}{h}\right)^4+\frac{5}{4}\left(\frac{t}{h}\right)^3-\frac{7}{4}\left(\frac{t}{h}\right)^2+\frac{5}{8}\left(\frac{t}{h}\right)+\frac{51}{120}, & t\in[h;2h], \\ \frac{1}{120}\left(3-\frac{t}{h}\right)^5, & t\in[2h;3h]. \end{cases} \tag{3}$$

Про похибку відтворення функції $p(t)$ за використанням сплайнів $S_{r,0}(p,t)$, $r=2,3,4,5$ свідчать наступні твердження [4 – 8]: при $h\to 0$ для довільної функції $p(t)\in C^2$ виконується

$$\left\|p(t)-S_{r,0}(p,t)\right\|\le\frac{(r+2)h^2}{24}\left\|p''\right\|+\varepsilon\left\|p\right\|+o\left(h^2\right). \tag{4}$$

Поставимо за мету даної роботи отримати подання *B*-сплайну шостого порядку та дослідити відповідний поліноміальний сплайн, що є лінійною комбінацією зазначених *B*-сплайнів.

**Виклад основного матеріалу.** На підставі виразів (2), (3) неважко отримати наступний вираз для *B*-сплайну шостого порядку (рис.1).

$$
B_{6,h}(t)=\begin{cases}
0, & t\notin\left[-\dfrac{7h}{2},\dfrac{7h}{2}\right],\\[2mm]
\dfrac{1}{720}\left(\dfrac{t}{h}+\dfrac{7}{2}\right)^6, & t\in\left[-\dfrac{7h}{2},-\dfrac{5h}{2}\right],\\[2mm]
-\dfrac{1}{120}\left(\dfrac{t}{h}\right)^6-\dfrac{7}{60}\left(\dfrac{t}{h}\right)^5-\dfrac{21}{32}\left(\dfrac{t}{h}\right)^4-\dfrac{133}{72}\left(\dfrac{t}{h}\right)^3-\dfrac{329}{128}\left(\dfrac{t}{h}\right)^2-\dfrac{1267}{960}\left(\dfrac{t}{h}\right)+\dfrac{1379}{7680}, & t\in\left[-\dfrac{5h}{2},-\dfrac{3h}{2}\right],\\[2mm]
\dfrac{1}{48}\left(\dfrac{t}{h}\right)^6+\dfrac{7}{48}\left(\dfrac{t}{h}\right)^5+\dfrac{21}{64}\left(\dfrac{t}{h}\right)^4+\dfrac{35}{288}\left(\dfrac{t}{h}\right)^3-\dfrac{91}{256}\left(\dfrac{t}{h}\right)^2+\dfrac{7}{768}\left(\dfrac{t}{h}\right)+\dfrac{7861}{15360}, & t\in\left[-\dfrac{3h}{2},-\dfrac{h}{2}\right],\\[2mm]
-\dfrac{1}{36}\left(\dfrac{t}{h}\right)^6+\dfrac{7}{48}\left(\dfrac{t}{h}\right)^4-\dfrac{77}{192}\left(\dfrac{t}{h}\right)^2+\dfrac{5887}{11520}, & t\in\left[-\dfrac{h}{2},\dfrac{h}{2}\right],\\[2mm]
\dfrac{1}{48}\left(\dfrac{t}{h}\right)^6-\dfrac{7}{48}\left(\dfrac{t}{h}\right)^5+\dfrac{21}{64}\left(\dfrac{t}{h}\right)^4-\dfrac{35}{288}\left(\dfrac{t}{h}\right)^3-\dfrac{91}{256}\left(\dfrac{t}{h}\right)^2-\dfrac{7}{768}\left(\dfrac{t}{h}\right)+\dfrac{7861}{15360}, & t\in\left[\dfrac{h}{2},\dfrac{3h}{2}\right],\\[2mm]
-\dfrac{1}{120}\left(\dfrac{t}{h}\right)^6+\dfrac{7}{60}\left(\dfrac{t}{h}\right)^5-\dfrac{21}{32}\left(\dfrac{t}{h}\right)^4+\dfrac{133}{72}\left(\dfrac{t}{h}\right)^3-\dfrac{329}{128}\left(\dfrac{t}{h}\right)^2+\dfrac{1267}{960}\left(\dfrac{t}{h}\right)+\dfrac{1379}{7680}, & t\in\left[\dfrac{3h}{2},\dfrac{5h}{2}\right],\\[2mm]
\dfrac{1}{720}\left(\dfrac{t}{h}-\dfrac{7}{2}\right)^6, & t\in\left[\dfrac{5h}{2},\dfrac{7h}{2}\right].
\end{cases}
\tag{5}
$$

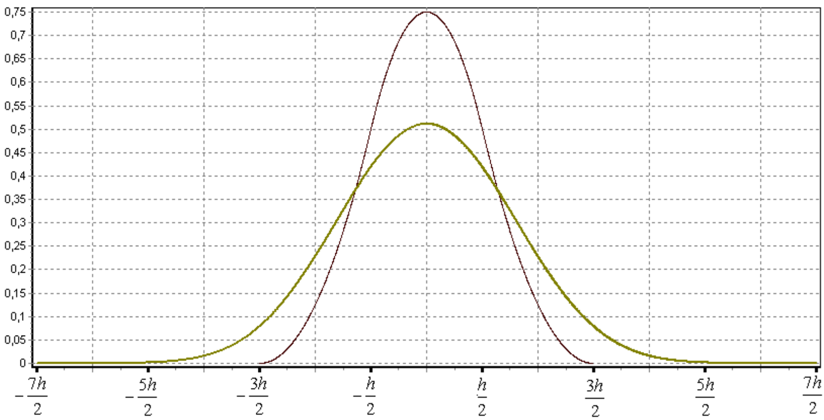


Рис.1. $B$-сплайни: порядку $r=2$ (тонка лінія);
порядку $r=6$ (товста лінія).

На графіку (рис.2), у порівнянні з гаусіаном, продемонстровано властивості $B$-сплайну шостого порядку в частотній області.

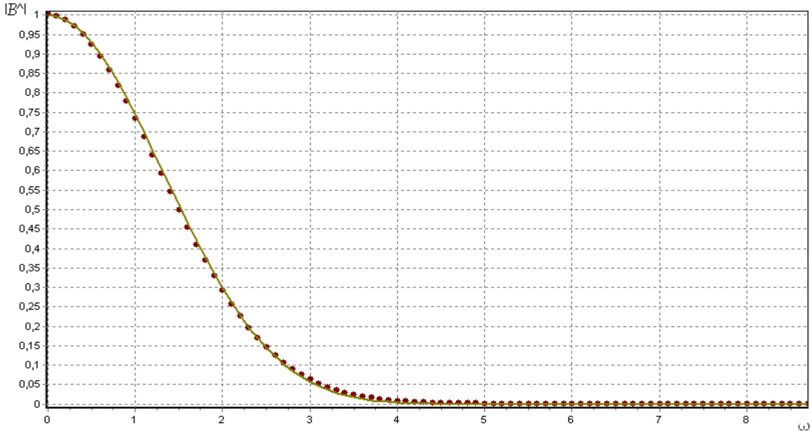


Рис.2. Частотна область: *B*-сплайн шостого порядку (суцільна лінія); гаусіан (крапки) з $\sigma = 0,782$

Із виразу (5) зрозуміло, що сплайн $B_{6,h}(t)$ є симетричною функцією відносно носія $d_6 = [-7h/2; 7h/2]$ з наступними властивостями:

$$B_{6,h}(0) = \frac{5887}{11520}, \qquad B_{6,h}\left(\pm\frac{h}{2}\right) = \frac{151}{360}, \qquad B_{6,h}(\pm h) = \frac{10543}{46080},$$

$$B_{6,h}\left(\pm\frac{3h}{2}\right) = \frac{19}{240}, \qquad B_{6,h}(\pm 2h) = \frac{361}{23040}, \qquad B_{6,h}\left(\pm\frac{5h}{2}\right) = \frac{1}{720},$$

$$B_{6,h}(\pm 3h) = \frac{1}{46080}, \qquad B_{6,h}\left(\pm\frac{kh}{2}\right) = 0,\ k > 6,$$

$$\frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2} B_{6,h}(t)\,dt = \frac{151}{315}, \qquad \frac{1}{h}\int_{(\pm 1-1/2)h}^{(\pm 1+1/2)h} B_{6,h}(t)\,dt = \frac{397}{1680},$$

$$\frac{1}{h}\int_{(\pm 2-1/2)h}^{(\pm 2+1/2)h} B_{6,h}(t)\,dt = \frac{1}{42}, \qquad \frac{1}{h}\int_{(\pm 3-1/2)h}^{(\pm 3+1/2)h} B_{6,h}(t)\,dt = \frac{1}{5040},$$

$$\frac{1}{h}\int_{(\pm k-1/2)h}^{(\pm k+1/2)h} B_{6,h}(t)\,dt = 0,\ k > 3,$$

$$\frac{1}{h}\int\limits_{(\pm 1/2-1/2)h}^{(\pm 1/2+1/2)h} B_{6,h}(t)\,dt=\frac{259723}{645120}, \qquad \frac{1}{h}\int\limits_{(\pm 3/2-1/2)h}^{(\pm 3/2+1/2)h} B_{6,h}(t)\,dt=\frac{20219}{215040},$$

$$\frac{1}{h}\int\limits_{(\pm 5/2-1/2)h}^{(\pm 5/2+1/2)h} B_{6,h}(t)\,dt=\frac{2179}{645120}, \qquad \frac{1}{h}\int\limits_{(\pm 7/2-1/2)h}^{(\pm 7/2+1/2)h} B_{6,h}(t)\,dt=\frac{1}{645120},$$

$$\frac{1}{h}\int\limits_{(\pm k/2-1/2)h}^{(\pm k/2+1/2)h} B_{6,h}(t)\,dt=0, \quad k>7.$$

За аналогією зі сплайнами $B_{r,h}(t)$, $r=2,3,4,5$ можна стверджувати, що якщо $S_r(\Delta_h)$ – множина всіх сплайнів мінімального дефекту за розбиттям $\Delta_h$ і $B_{6,h}(t)\in S_6(\Delta_h)$, то лінійна комбінація сплайнів $B_{6,h}(t)$ також буде належати множині сплайнів мінімального дефекту $S_6(\Delta_h)$.

Для апроксимації функції $p(t)$ за значеннями типу (1) у вузлах розбиття $\Delta_h$, введемо таку лінійну комбінацію *B*-сплайнів (5):

$$S_{6,0}(p,t)=\sum_{i\in Z} p_i B_{6,h}\left(t-(i+0,5)h\right), \tag{6}$$

Подамо сплайн $S_{6,0}(p,t)$ у зручному для реалізації в обчислювальному середовищі вигляді. Якщо ввести заміну $x=2\left(t-(i+0,5)h\right)/h$, $|x|\le 1$, то вираз (6) можна записати так:

$$\begin{gathered}
S_{6,0}(p,t)=\frac{1}{46080}\Big((1-x)^6 p_{i-3}+\\
+\left(722-1416x+1110x^2-400x^3+30x^4+24x^5-6x^6\right)p_{i-2}+\\
+\left(10543-8670x+1185x^2+860x^3-255x^4-30x^5+15x^6\right)p_{i-1}+\\
+\left(23548-4620x^2+420x^4-20x^6\right)p_i+\\
+\left(10543+8670x+1185x^2-860x^3-255x^4+30x^5+15x^6\right)p_{i+1}+\\
+\left(722+1416x+1110x^2+400x^3+30x^4-24x^5-6x^6\right)p_{i+2}+(1+x)^6 p_{i+3}\Big).
\end{gathered} \tag{7}$$

Нехай у вузлах розбиття $\Delta_h$ для значень деякої гладкої неперервної функції $p(t)$ виконується умова (1). Тоді для сплайну (6) має місце наступна рівність

$$S_{6,0}(p,t) = S_{6,0}(\bar{p},t) + S_{6,0}(\varepsilon,t).$$

Оцінка якості відтворення функції $p(t)$ зводиться до оцінки відхилення

$$\left|p(t) - S_{6,0}(p,t)\right| = \left|p(t) - S_{6,0}(\bar{p},t) - S_{6,0}(\varepsilon,t)\right|$$

або для $\left|\varepsilon_i\right| < \varepsilon$, $i \in Z$, до оцінки нерівності

$$\left|p(t) - S_{6,0}(p,t)\right| \le \left|p(t) - S_{6,0}(\bar{p},t)\right| + \varepsilon\left\|S_{6,0}\right\|, \tag{8}$$

де $\left\|S_{6,0}\right\| = \sup\limits_{|\varepsilon_i|} \max\limits_{t} \left|S_{6,0}(\varepsilon,t)\right|$ – норма сплайн-оператора $S_{6,0}(p,t)$.

Подальша задача оцінки якості відтворення $p(t)$ складається з двох етапів: знаходження норми сплайн-оператора $S_{6,0}(p,t)$ і задача визначення похибки відтворення.

З урахуванням розкладу $S_{6,0}(\bar{p},t)$ та $p(t) \in C^6$ в ряд Тейлора в околі точки $\left((i-0{,}5)h\right)$, нескладно отримати, що для $\forall p(t) \in C^2$ при $h \to 0$ рівномірно по $t$ має місце асимптотична рівність

$$p(t) - S_{6,0}(\bar{p},t) = -\frac{1}{3} p''(t) h^2 + \mathrm{o}\left(h^2\right).$$

Отже, при $h \to 0$ для довільної функції $p(t) \in C^2$ виконується

$$\left\|p(t) - S_{5,0}(\bar{p},t)\right\| = \frac{7h^2}{24}\left\|p''\right\| + \mathrm{o}\left(h^2\right).$$

Проведемо оцінку норми сплайну (6).

*Теорема 1.* Для сплайну $S_{6,0}(p,t)$ є вірним

$$\left\|S_{6,0}\right\| = \left\|p\right\|.$$

*Доведення.* З представлення сплайну $S_{6,0}(p,t)$ у вигляді (7) слідує, що

$$\left\|S_{6,0}\right\| \le \frac{1}{46080}\left\|p\right\| \max_{|x|\le 1} A(x),$$

де

$$A(x)=\left|(1-x)^6\right|+\left|722-1416x+1110x^2-400x^3+30x^4+24x^5-6x^6\right|+$$
$$+\left|10543-8670x+1185x^2+860x^3-255x^4-30x^5+15x^6\right|+$$
$$+\left|23548-4620x^2+420x^4-20x^6\right|+$$
$$+\left|10543+8670x+1185x^2-860x^3-255x^4+30x^5+15x^6\right|+$$
$$+\left|722+1416x+1110x^2+400x^3+30x^4-24x^5-6x^6\right|+\left|(1+x)^6\right|.$$

Враховуючи, що функція $A(x)$ парна, для знаходження її максимуму достатньо розглянути її для $x\in[0;1]$. Для цих $x$, зважаючи, що вирази під знаком модуля більші нуля, маємо:

$$\max_{x\in[0;1]} A(x)=46080\,.$$

Таким чином

$$\left\|S_{6,0}\right\|\le\|p\|\,. \tag{9}$$

З іншого боку для будь-якого частинного випадку

$$\left\|S_{6,0}(p,t)\right\|\ge\left\|S_{6,0}\left(p^*,t\right)\right\|.$$

Тоді для $x=0$ маємо

$$S_{6,0}(p,t)=\frac{1}{46080}\Big(p_{i-3}^*+722p_{i-2}^*+10543p_{i-1}^*+$$
$$+23548p_i^*+10543p_{i+1}^*+722p_{i+2}^*+p_{i+3}^*\Big).$$

Якщо

$$p_{i-3}^*=p_{i-2}^*=p_{i-1}^*=p_i^*=p_{i+1}^*=p_{i+2}^*=p_{i+3}^*=\|p\|,$$

то

$$\left\|S_{6,0}\right\|\ge\left\|S_{6,0}\left(p^*,t\right)\right\|\ge\left|S_{6,0}\left(p^*,0\right)\right|=\|p\|\,,$$

а отже, з урахуванням (9), приходимо, що

$$\left\|S_{6,0}\right\|=\|p\|\,.$$

Теорему доведено.

*Наслідок 2.* Для $\forall p(t)\in C^2$ має місце

$$\left\| p(t,q) - S_{6,0}(p,t) \right\| \le \frac{h^2}{3}\left\| p'' \right\| + \varepsilon \left\| p \right\| + o\left(h^2\right).$$

**Висновки.** В роботі отримано подання та властивості *B*-сплайну шостого порядку, визначеного на рівномірній сітці вузлів. Отримано явний вигляд та проведено дослідження поліноміального сплайну, близького до інтерполяційних у середньому, що є лінійною комбінацією *B*-сплайнів шостого порядку.

Як слід було очікувати, у порівняні зі сплайнами $S_{r,0}(p,t)$, $r = 2,3,4,5$, сплайн $S_{6,0}(p,t)$ має більш виражені властивості згладжування та підтверджено справедливість нерівності (4) для випадку, коли $r = 6$.

Подальші дослідження можуть полягати в отриманні часткових випадків сплайну $S_{6,0}(p,t)$, задля реалізації їх в задачах обробки цифрових сигналів та узагальнені теоретичних результатів досліджень на дво- та багатовимірний випадок.

## Бібліографічні посилання


1. Приставка П.О. Лінійні комбінації *B*-сплайнів, близькі до інтерполяційних у середньому, в задачі моделювання аналогових сигналів / Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій : зб. наук. праць. - Д.: Вид-во Дніпропетр. ун-ту.- 2011. -Т.15. –С.4-17.
2. Чуи Ч. Введение в вэйвлеты // Пер. с. англ. –М.: Мир, 2001. –412 с.
3. M. Unser, "Splines: A Perfect Fit for Signal and Image Processing," *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 16, no. 6, pp. 22-38, 1999.
4. Приставка П.О., Чолишкіна О.Г. Дослідження *B*-сплайну п'ятого порядку та їх лінійної комбінації / Математичне моделювання. – ДДТУ, Дніпродзержинськ. – 2007. - №1(16). - С.14-17.
5. **Лигун А.А., Шумейко А.А.** Асимптотические методы восстановления кривых. . –К.: ІМ НАН України, 1996. - 358 с.
6. **Лигун А.А., Кармазина В.В.** О восстановлении эмпирической функции плотности распределения с помощью гистосплайнов второго порядка/ Днепродзержинский индустр. ин-т. – Днепродзержинск: 1989.- 30 с.-Деп. в УкрНИИНТИ 8.06.89, N1559- Ук89.
7. **Лигун А.А., Кармазина В.В.** Восстановление функций плотности распределения и их производных с помощью кубических гистосплайнов/ Днепродзержинский индустр. ин-т. – Днепродзержинск: 1989. – 38 с. –Деп. в УкрНИИНТИ 13.11.89, N2569– Ук89.
8. **Приставка П.О.** Поліномаільні сплайни при обробці даних. Д.: Вид-во Дніпропетр. ун-ту, 2004. – 236 с.