Дослідження *B*-сплайну п'ятого порядку та їх лінійної комбінації

П.О.ПРИСТАВКА, О.Г.ЧОЛИШКІНА

Дніпропетровський національний університет

Отримано властивості *B*-сплайну п'ятого порядку, визначеного на рівномірному розбитті вісі аргументу. Досліджено властивості поліноміального сплайну на основі *B*-сплайнів п'ятого порядку, що є близьким до інтерполяційного у середньому.

Получены свойства *B*-сплайна пятого порядка, определённого на равномерном разбиении оси аргумента. Исследованы свойства полиномиального сплайна на основе *B*-сплайнов пятого порядка, близького к интерполяционному в середнем.

The features of the *B*-spline of the fifth order have been obtained. This spline has been determined on the even breaking up of the axis of the argument. The features of the polynomial spline based on the *B*-spline of the fifth order which is close to the interpolar on an average have been investigate.

Постановка проблеми. В задачах обробки послідовностей відліків гладких функцій, що є результатами вимірювань чи подання сигналів у цифровому форматі, виникає потреба врахування факту наявних похибок в даних. В такій постановці задачі застосування мають два типи методів апроксимації: високоточні – такі, що враховують осциляції функцій та методи згладжування, спрямовані на оцінку тренду. Для останнього типу обчислювальний аспект застосування процедур локальної апроксимації є більш привабливим у порівнянні з класичним підходом побудови моделей на підставі методу найменших квадратів.

Останні десятиріччя обсяги даних, що підлягають обробці зростають і така тенденція є постійною. Для великих обсягів даних ширина вікна ковзного середнього (дискретної згортки функцій) вже не є вирішальним фактором стримування при застосуванні відповідного методу апроксимації. Більш того, ширина вікна (кількість членів дискретної згортки) для конкретних задач може мати інформативну змістовну інтерпретацію.

У зв'язку зі зробленими зазначеннями актуальною є задача отримання нових методів локальної апроксимації гладких функцій, заданих значеннями на рівномірних сітках вузлів, причому таких, що відповідають вимогам наявності високих згладжувальних властивостей при відносно низькій обчислювальній складності.

Аналіз досліджень та постановка задачі. На сьогоднішній день беззаперечним лідером застосувань серед методів локальної неперервної апроксимації є лінійні комбінації *B*-сплайнів. Задача відтворення гладких функцій на основі лінійних комбінацій *B*-сплайнів висвітлено у досить багатьох роботах І.Шоенберга, К.Де Бора, М.П.Корнійчука та ін. Увагу поліноміальним сплайнам, визначеним на локальних носіях, близьким до інтерполяційних у середньому, приділено А.О.Лигуном, В.В.Кармазіною [1 – 3] та у авторських дослідженнях [4].

Так для сплайнів однієї змінної мають місце наступні визначення. Нехай з кроком $h>0$ задано розбиття дійсної вісі $\Delta_h : t_i = ih$, $i \in Z$, у кожній точці якого отримано значення деякої неперервної функції $p(t) \in C^r$, $r \geq 2$, визначеної на $R_1(-\infty;\infty)$. Вважають, що інформація про функцію $p(t)$, яка підлягає відтворенню, задано у вузлах розбиття Δ_h у вигляді інтеграла $\overline{p}_i = \frac{1}{h}\int\limits_{(i-0,5)h}^{(i+0,5)h} p(t)\,dt$, при цьому, істинне значення функції $p(t)$ у вузлах визначається так:

$$p_i = \overline{p}_i + \varepsilon_i\,,\ i \in Z\,, \qquad (1)$$

де ε_i – похибка.

Для апроксимації функції $p(t)$ за значеннями типу (1) у вузлах розбиття Δ_h, вводяться такі поліноміальні сплайни на основі *B*-сплайнів, що є близькими до інтерполяційних у середньому:

$$S_{r,0}(p,t) = \sum_{i\in Z} p_i B_{r,h}\big(t-(i+0,5)h\big)\,,\ r = 2,4\,,$$

$$S_{3,0}(p,t) = \sum_{i\in Z} p_i B_{3,h}(t-ih)\,,$$

де *B*-сплайн $B_{r,h}(t)$ порядку r ($r \geq 1$) визначається рекурентно наступним чином: якщо

$$B_{0,h}(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [-h/2;h/2], \\ 1, & t \in [-h/2;h/2], \end{cases}$$

то

$$B_{r,h}(t) = \frac{1}{h}\int\limits_{t-h/2}^{t+h/2} B_{r-1,h}(\tau)\,d\tau\,. \qquad (2)$$

Наприклад, *B*-сплайн четвертого порядку такий:

$$B_{4,h}(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [-5h/2;5h/2], \\ (t/h+5/2)^4/24, & t \in [-5h/2;-3h/2], \\ \Psi(t/h) - 5(t/h+1/2)^4/12, & t \in [-3h/2;-h/2], \\ \Psi(t/h), & t \in [-h/2;h/2], \\ \Psi(t/h) - 5(t/h-1/2)^4/12, & t \in [h/2;3h/2], \\ (t/h-5/2)^4/24, & t \in [3h/2;5h/2], \end{cases} \qquad (3)$$

де $$\Psi(t) = \frac{115}{192} - \frac{5}{8}t^2 + \frac{1}{4}t^4\,.$$

Про похибку відтворення функції $p(t)$ за використанням сплайнів $S_{r,0}(p,t)$, $r = 2,3,4$ свідчать наступні твердження [2 – 4]. При $h \to 0$ для довільної функції $p(t) \in C^2$ виконується наступне:

$$\|p(t) - S_{2,0}(p,t)\| = h^2\|p''(t)\|/6 + \varepsilon\|p(t)\| + o\big(h^2\big)\,,$$

$$\|p(t) - S_{3,0}(p,t)\| = 5h^2\|p''(t)\|/24 + \varepsilon\|p(t)\| + o\big(h^2\big)\,, \qquad (4)$$

$$\|p(t) - S_{4,0}(p,t)\| = h^2\|p''(t)\|/4 + \varepsilon\|p(t)\| + o\big(h^2\big)\,.$$

Поставимо за мету даної роботи отримати подання B-сплайну п'ятого порядку та дослідити відповідний поліноміальний сплайн, що є лінійною комбінацією зазначених B-сплайнів.

Виклад основного матеріалу. На підставі виразів (2), (3) неважко отримати наступний вираз для B-сплайну п'ятого порядку:

$$B_{5,h}(t)=\begin{cases}0, & t\notin[-3h;3h],\\ \frac{1}{120}\left(3+\frac{t}{h}\right)^5, & t\in[-3h;-2h],\\ \psi_1(t), & t\in[-2h;-h],\\ \frac{1}{12}\left(\frac{t}{h}\right)^5+\frac{1}{4}\left(\frac{t}{h}\right)^4-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{h}\right)^2+\frac{11}{20}, & t\in[-h;0],\\ -\frac{1}{12}\left(\frac{t}{h}\right)^5+\frac{1}{4}\left(\frac{t}{h}\right)^4-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{h}\right)^2+\frac{11}{20}, & t\in[0;h],\\ \psi_2(t), & t\in[h;2h],\\ \frac{1}{120}\left(3-\frac{t}{h}\right)^5, & t\in[2h;3h].\end{cases}\tag{5}$$

де $\psi_1(t)=-\frac{1}{24}\left(\frac{t}{h}\right)^5-\frac{3}{8}\left(\frac{t}{h}\right)^4-\frac{5}{4}\left(\frac{t}{h}\right)^3-\frac{7}{4}\left(\frac{t}{h}\right)^2-\frac{5}{8}\left(\frac{t}{h}\right)+\frac{51}{120}$;

$$\psi_2(t)=\frac{1}{24}\left(\frac{t}{h}\right)^5-\frac{3}{8}\left(\frac{t}{h}\right)^4+\frac{5}{4}\left(\frac{t}{h}\right)^3-\frac{7}{4}\left(\frac{t}{h}\right)^2+\frac{5}{8}\left(\frac{t}{h}\right)+\frac{51}{120}.$$

Із (5) зрозуміло, що сплайн $B_{5,h}(t)$ - симетрична функція відносно носія $d_5=[-3h;3h]$ з наступними властивостями:

$$B_{5,h}(0)=\frac{11}{20},\quad B_{5,h}\left(\pm\frac{h}{2}\right)=\frac{1051}{1920},\quad B_{5,h}(\pm h)=\frac{13}{60},$$

$$B_{5,h}\left(\pm\frac{3h}{2}\right)=\frac{399}{1280},\quad B_{5,h}(\pm 2h)=\frac{1}{120},\quad B_{5,h}\left(\pm\frac{5h}{2}\right)=\frac{1}{3840},$$

$$B_{5,h}\left(\pm\frac{kh}{2}\right)=0,\ k>5,$$

$$\frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2}B_{5,h}(t)dt=\frac{5887}{11520},\quad \frac{1}{h}\int_{(\pm1-1/2)h}^{(\pm1+1/2)h}B_{5,h}(t)dt=\frac{10543}{46080},$$

$$\frac{1}{h}\int_{(\pm2-1/2)h}^{(\pm2+1/2)h}B_{5,h}(t)dt=\frac{361}{23040},\quad \frac{1}{h}\int_{(\pm3-1/2)h}^{(\pm3+1/2)h}B_{5,h}(t)dt=\frac{1}{46080},$$

$$\frac{1}{h}\int_{(\pm k-1/2)h}^{(\pm k+1/2)h}B_{5,h}(t)dt=0,\ k>3.\quad \frac{1}{h}\int_{(\pm1/2-1/2)h}^{(\pm1/2+1/2)h}B_{5,h}(t)dt=\frac{151}{360},$$

$$\frac{1}{h}\int_{(\pm3/2-1/2)h}^{(\pm3/2+1/2)h}B_{5,h}(t)dt=\frac{19}{240},\quad \frac{1}{h}\int_{(\pm5/2-1/2)h}^{(\pm5/2+1/2)h}B_{5,h}(t)dt=\frac{1}{720},$$

$$\frac{1}{h}\int_{(\pm k/2-1/2)h}^{(\pm k/2+1/2)h}B_{5,h}(t)dt=0,\quad k>5.$$

За аналогією зі сплайнами $B_{r,h}(t)$, $r=2,3,4$ можна стверджувати, що якщо $S_r(\Delta_h)$ – множина всіх сплайнів мінімального дефекту за розбиттям Δ_h і $B_{5,h}(t)\in S_5(\Delta_h)$, то лінійна комбінація $S_5(t)$ сплайнів $B_{5,h}(t)$ також буде належати множині $S_5(\Delta_h)$, отже, лінійна комбінація $S_5(t)$ – є сплайн мінімального дефекту.

Для апроксимації функції $p(t)$ за значеннями типу (1) у вузлах розбиття Δ_h, введемо таку лінійну комбінацію B-сплайнів (5):

$$S_{5,0}(p,t)=\sum_{i\in Z}p_iB_{5,h}(t-ih),\tag{6}$$

Подання сплайну $S_{5,0}(p,t)$ у вигляді (6) не зовсім зручне для реалізації в обчислювальному середовищі. Якщо ввести заміну $x=2(t-ih)/h$, $|x|\le 1$, то сплайн $S_{5,0}(p,t)$ можна навести в розгорнутому представленні:

$$\begin{aligned}S_{5,0}(p,t)&=\frac{1}{3840}(-p_{i-2}+5p_{i-1}-10p_i+10p_{i+1}-5p_{i+2}+p_{i+3})x^5+\\&+\frac{1}{768}(p_{i-2}-3p_{i-1}+2p_i+2p_{i+1}-3p_{i+2}+p_{i+3})x^4+\\&+\frac{1}{384}(-p_{i-2}-3p_{i-1}+14p_i-14p_{i+1}+3p_{i+2}+p_{i+3})x^3+\\&+\frac{1}{384}(p_{i-2}+21p_{i-1}-22p_i-22p_{i+1}+21p_{i+2}+p_{i+3})x^2+\\&+\frac{1}{768}(-p_{i-2}-75p_{i-1}-154p_i+154p_{i+1}+75p_{i+2}+p_{i+3})x+\\&+\frac{1}{3840}(p_{i-2}+237p_{i-1}+1682p_i+1682p_{i+1}+237p_{i+2}+p_{i+3}).\end{aligned}\tag{7}$$

Нехай у вузлах розбиття Δ_h для значень деякої гладкої неперервної функції $p(t)$ виконується умова (1). Тоді для сплайну (6) має місце наступна рівність

$$S_{5,0}(p,t)=S_{5,0}(\bar{p},t)+S_{5,0}(\varepsilon,t).$$

Оцінка якості відтворення функції $p(t)$ зводиться до оцінки відхилення

$$|p(t)-S_{5,0}(p,t)|=|p(t)-S_{5,0}(\bar{p},t)-S_{5,0}(\varepsilon,t)|$$

або для $|\varepsilon_i|<\varepsilon$, $i\in Z$, до оцінки нерівності

$$|p(t)-S_{5,0}(p,t)|\le|p(t)-S_{5,0}(\bar{p},t)|+\varepsilon\|S_{5,0}(p,t)\|,\tag{8}$$

де $\|S_{5,0}(p,t)\|=\sup\limits_{|\varepsilon_i|}\max\limits_t|S_{5,0}(\varepsilon,t)|$ – норма оператора $S_{5,0}(p,t)$.

Подальша задача оцінки якості відтворення $p(t)$ складається з двох етапів: знаходження норми сплайн-оператора $S_{5,0}(p,t)$ і задача визначення похибки відтворення. Про похибку відтворення функції $p(t)$ за використанням сплайну $S_{5,0}(\bar{p},t)$, свідчить наступна теорема та наслідки.

Теорема 1. Якщо $p(t)\in C^2$, то при $h\to 0$ рівномірно по t має місце асимптотична рівність

$$p(t)-S_{5,0}(\bar{p},t)=-\frac{7}{24}p''(t)h^2+o(h^2).$$

Доведення. Розглянемо розкладення функції $p(t,q)\in C^5$ у ряд Тейлора в околі точки $((i-0,5)h)$. Введемо позначення $t^*=(i-0,5)h$, $\tau=t-t^*$. Тоді

$$p(t)=p(t^*)+p'(t^*)\tau+\frac{1}{2!}p''(t^*)\tau^2+\frac{1}{3!}p'''(t^*)\tau^3+\\+\frac{1}{4!}p^{(4)}(t^*)\tau^4+\frac{1}{5!}p^{(5)}(t^*)\tau^5+o(h^5).\tag{9}$$

Розглянемо представлення величин $\bar{p}_{i-2}$, $\bar{p}_{i-1}$, $\bar{p}_i$, $\bar{p}_{i+1}$, $\bar{p}_{i+2}$, $\bar{p}_{i+3}$ у вигляді розкладення в ряд Тейлора. Так, для $\bar{p}_i$ отримаємо (тут і далі будемо записувати $p=p(t^*)$, $p'=p'(t^*)\ldots$):

$$\bar{p}_i=\frac{1}{h}\int_{-h}^{0}\left(p+p'\tau+\frac{1}{2}p''\tau^2+\frac{1}{6}p'''\tau^3+\ldots\right)d\tau=$$

$$=p-\frac{1}{2}p'h+\frac{1}{6}p''h^2-\frac{1}{24}p'''h^3+\frac{1}{120}p^{(4)}h^4-\frac{1}{720}p^{(5)}h^5+o(h^5),$$

$$\overline{p}_{i+1} = \frac{1}{h}\int_0^h \left(p + p'\tau + \frac{1}{2}p''\tau^2 + \frac{1}{6}p'''\tau^3 + \ldots \right) d\tau =$$

$$= p + \frac{1}{2}p'h + \frac{1}{6}p''h^2 + \frac{1}{24}p'''h^3 + \frac{1}{120}p^{(4)}h^4 + \frac{1}{720}p^{(5)}h^5 + o\left(h^5\right),$$

$$\overline{p}_{i-1} = p - \frac{3}{2}p'h + \frac{7}{6}p''h^2 - \frac{5}{8}p'''h^3 + \frac{31}{120}p^{(4)}h^4 - \frac{7}{80}p^{(5)}h^5 + o\left(h^5\right),$$

$$\overline{p}_{i+2} = p + \frac{3}{2}p'h + \frac{7}{6}p''h^2 + \frac{5}{8}p'''h^3 + \frac{31}{120}p^{(4)}h^4 + \frac{7}{80}p^{(5)}h^5 + o\left(h^5\right),$$

$$\overline{p}_{i-2} = p - \frac{5}{2}p'h + \frac{19}{6}p''h^2 - \frac{65}{24}p'''h^3 + \frac{211}{120}p^{(4)}h^4 - \frac{665}{720}p^{(5)}h^5 + o\left(h^5\right),$$

$$\overline{p}_{i+3} = p + \frac{5}{2}p'h + \frac{19}{6}p''h^2 + \frac{65}{24}p'''h^3 + \frac{211}{120}p^{(4)}h^4 + \frac{665}{720}p^{(5)}h^5 + o\left(h^5\right).$$

Розкладення сплайну $S_{5,0}\left(\overline{p},t\right)$ в ряд Тейлора поблизу точки $t*$ має вигляд:

$$S_{5,0}\left(\overline{p},t\right) = \left(p + \frac{7}{24}p''h^2 + \frac{77}{1920}p^{(4)}h^4 \right) +$$

$$+\left(p' + \frac{7}{24}p'''h^2 + \frac{77}{1920}p^{(5)}h^4 \right)\tau + \left(p'' + \frac{7}{48}p^{(4)}h^2 \right)\tau^2 +$$

$$+\left(\frac{1}{6}p''' + \frac{7}{144}p^{(5)}h^2 \right)\tau^3 + \frac{1}{24}p^{(4)}\tau^4 + \frac{1}{120}p^{(5)}\tau^5 + o\left(h^5\right).$$

Тоді

$$p(t) - S_{5,0}\left(\overline{p},t\right) = -\frac{7}{24}h^2\left(p'' + p'''\tau + \frac{1}{2}p^{(4)}\tau^2 + \frac{1}{6}p^{(5)}\tau^3 \right) -$$

$$-\frac{77}{1920}h^4\left(p^{(4)} + p^{(5)}\tau \right) + o\left(h^2\right) = -\frac{7}{24}h^2 p''(t) + o\left(h^2\right),$$

де
$$p''(t) = p'' + p'''\tau + p^{(4)}\tau^2 + \frac{1}{6}p^{(5)}\tau^3 + o\left(h^3\right).$$

Теорему доведено.

Наслідок 1. При $h \to 0$ для довільної функції $p(t) \in C^2$ виконується

$$\left\| p(t) - S_{5,0}\left(\overline{p},t\right) \right\| = \frac{7h^2}{24}\left\| p''(t) \right\| + o\left(h^2\right).$$

Проведемо оцінку норми сплайну (1).

Теорема 2. Для сплайну $S_{5,0}(p,t)$ є вірним

$$\left\| S_{5,0}(p,t) \right\| = \left\| p(t) \right\|.$$

Доведення. Проведемо перегрупування у виразі (7) та розглянемо представлення $S_{5,0}(p,t)$ у вигляді:

$$S_{5,0}(p,t) = \frac{1}{3840}\Big((1-x)^5 p_{i-2} +$$

$$\left(237 - 375x + 210x^2 - 30x^3 - 15x^4 + 5x^5 \right) p_{i-1} +$$

$$+\left(1682 - 770x - 220x^2 + 140x^3 + 10x^4 - 10x^5 \right) p_i +$$

$$+\left(1682 + 770x - 220x^2 - 140x^3 + 10x^4 + 10x^5 \right) p_{i+1} +$$

$$+\left(237 + 375x + 210x^2 + 30x^3 - 15x^4 - 5x^5 \right) p_{i+2} + (1+x)^5 p_{i+3} \Big).$$

Тоді

$$\left\| S_{5,0}(p,t) \right\| \le \frac{1}{3840}\left\| p(t) \right\| \max_{|x|\le 1} A(x),$$

де
$$A(x) = \left| (1-x)^5 \right| + \left| 237 - 375x + 210x^2 - 30x^3 - 15x^4 + 5x^5 \right| +$$

$$+\left| 1682 - 770x - 220x^2 + 140x^3 + 10x^4 - 10x^5 \right| +$$

$$+\left| 1682 + 770x - 220x^2 - 140x^3 + 10x^4 + 10x^5 \right| +$$

$$+\left| 237 + 375x + 210x^2 + 30x^3 - 15x^4 - 5x^5 \right| + \left| (1+x)^5 \right|.$$

Враховуючи, що функція $A(x)$ парна, для знаходження її максимуму достатньо розглянути її для $x \in [0;1]$. Для цих x, зважаючи, що вирази під знаком модуля більші нуля, маємо:

$$A(x) = 3840.$$

Таким чином

$$\left\| S_{5,0}(p,t) \right\| \le \left\| p(t) \right\|. \tag{10}$$

З іншого боку для будь-якого частинного випадку

$$\left\| S_{5,0}(p,t) \right\| \ge \left\| S_{5,0}\left(p^*,t\right) \right\|.$$

Тоді для $x = 0$ маємо

$$S_{5,0}(p,t) = \frac{1}{3840}\left(p_{i-2}^* + 237p_{i-1}^* + 1682p_i^* + 1682p_{i+1}^* + 237p_{i+2}^* + p_{i+3}^* \right).$$

Якщо $p_{i-2}^* = p_{i-1}^* = p_i^* = p_{i+1}^* = p_{i+2}^* = p_{i+3}^* = \|p\|$, то

$$\left\| S_{5,0}(p,t) \right\| \ge \left\| S_{3,0}\left(p^*,t\right) \right\| \ge \left| S_{3,0}\left(p^*,0\right) \right| = \left\| p(t) \right\|,$$

а отже, з урахуванням (10), приходимо, що

$$\left\| S_{5,0}(p,t) \right\| = \left\| p(t) \right\|.$$

Теорему доведено.

Наслідок 2. Для $\forall p(t) \in C^2$ має місце

$$\left\| p(t,q) - S_{5,0}(p,t) \right\| \le \frac{7h^2}{24}\left\| p''(t) \right\| + \varepsilon\|p\| + o\left(h^2\right).$$

Висновки. В роботі отримано подання та властивості *B*-сплайну п'ятого порядку, визначеному на рівномірній сітці вузлів. Досліджено поліноміальний сплайн, близький до інтерполяційних у середньому, що є лінійною комбінацією *B*-сплайнів п'ятого порядку. Усі розглянуті оцінки носять асимптотичний характер, проте це дає повну уяву про відхилення сплайну $S_{5,0}(p,t)$ близького до інтерполяційних у середньому, від функції $p(t)$, яку він апроксимує.

Зокрема, встановлено, що у порівняні зі сплайнами $S_{r,0}(p,t)$, $r = 2,3,4$, сплайн сплайнів $S_{5,0}(p,t)$ має більш виражені властивості згладжування. Крім того встановлено, що при $r = 2,3,4,5$ похибка апроксимації функції $p(t) \in C^2$, визначеної на рівномірному розбитті значеннями типу (1), збільшується на величину $\frac{h^2}{24}\left\| p''(t) \right\|$ при кожному збільшенні ступеня поліному.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Лигун А.А., Шумейко А.А.* Асимптотические методы восстановления кривых. . –К.: ІМ НАН України, 1996. - 358 с.
2. *Лигун А.А., Кармазина В.В.* О восстановлении эмпирической функции плотности распределения с помощью гистосплайнов второго порядка/ Днепродзержинский индустр. ин-т. – Днепродзержинск: 1989.-30 с.-Деп. в УкрНИИНТИ 8.06.89, N1559-Ук89.
3. *Лигун А.А., Кармазина В.В.* Восстановление функций плотности распределения и их производных с помощью кубических гистосплайнов/ Днепродзержинский индустр. ин-т. – Днепродзержинск: 1989. –38 с. –Деп. в УкрНИИНТИ 13.11.89, N2569–Ук89.
4. *Приставка П.О.* Поліномаільні сплайни при обробці даних. Д.: Вид-во Дніпропетр. ун-ту, 2004. – 236 с.

Дніпропетровський національний університет, кафедра математичного забезпечення ЕОМ.

Дата відправлення 22.03.2007.

Поштовий індекс 49100.