УДК 517.91

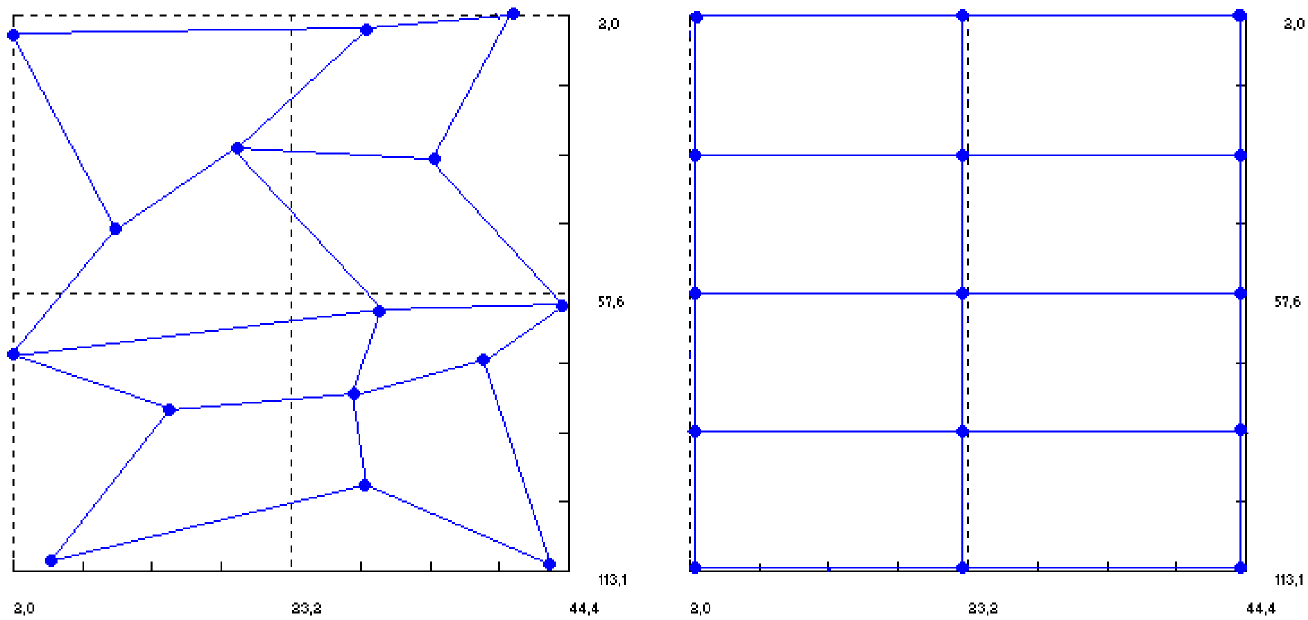
П.О.Приставка

Дніпропетровський національний університет

ВІДТВОРЕННЯ ДВОВИМІРНИХ ФУНКЦІЙ, ВИЗНАЧЕНИХ НА РЕГУЛЯРНИХ НЕРІВНОМІРНИХ СІТКАХ ВУЗЛІВ

Викладено матеріал прикладного характеру, стосовно вирішення задачі моделювання поверхонь, заданих регулярними нерівномірними сітками вузлів. Відтворення проводиться на підставі локальних поліноміальних сплайнів двох змінних, близьких до інтерполяційних у середньому.

Постановка проблеми. Поверхні та їх описання відіграє важливу роль в конструюванні, виробництві, при візуалізації даних, отриманих в результаті спостережень, тощо. Математичні методи побудови моделей поверхонь графіки суттєво різняться, залежно від характеристик та структури вихідних даних: регулярні данні, тобто, поверхню задано вузловими точками, розташованими на полігональній чотирикутній сітці; нерегулярні данні та результати спостережень. Регулярні дані, в свою чергу, поділяються на такі, що задані на рівномірних та нерівномірних розбиттях (рис.1).



а) б)

Рис.1. Регулярні сітки вузлів: а) нерівномірна; б) рівномірна.

Традиційно при обробці спостережень реалізують відтворення регресій; у випадку нерегулярних масивів даних – методи триангуляції. На теперішній час найбільше поширення в математичному програмному забезпеченні обробки регулярних даних мають методи локальної апроксимації на основі *B*-сплайнів.

Слід відзначити, що обчислювальна технологія застосування сплайнів на основі *B*-сплайнів значно спрощується при наявності рівномірної сітки вузлів.

Останнє пов'язано з можливістю застосування в процесі обчислень явних представлень двовимірних сплайнів на основі *B*-сплайнів, визначених на рівномірних розбиттях. Вирішенню проблеми підвищення швидкодії автоматизованого моделювання поверхонь по даним, заданим на регулярних нерівномірних сітках вузлів присвячено статтю.

Аналіз досліджень. Фундаментальною роботою, в якій узагальнено існуючі підходи до алгоритмізації побудови моделей поверхонь, є книга Д. Роджерса та Дж. Адамса [1]. Бібліографія цієї перекладеної російською мовою праці складає десятки робіт, глибина матеріалу, чіткий та лаконічний стиль викладення може повністю задовольнити потреби розробників програмного забезпечення вирішення задач машинної графіки та автоматизації проектування. Проте ряд алгоритмів, викладених в [1], можна суттєво вдосконалити, зокрема, це стосується питання використання обчислювальних схем на основі *B*-сплайнів.

Декартов добуток *B*-сплайн поверхні [1] визначається так:

$$Q(u,w)=\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{m+1} p_{i,j}N_{i.k}(u)M_{j,l}(w), \tag{1}$$

де $N_{i.k}(u)$, $M_{j,l}(w)$ – базисні функції *B*-сплайну в біпараметричних напрямах u та w; $p_{i,j}$ – вершини полігональної сітки. Для побудови моделі поверхні достатньо проводити обчислення відповідних базисних функцій [2]:

$$N_{i.k}(u)=\frac{(u-x_i)N_{i.k-1}(u)}{x_{i+k-1}-x_i}+\frac{(x_{i+k}-u)N_{i+1.k-1}(u)}{x_{i+k}-x_{i+1}},\quad N_{i,1}(u)=\begin{cases}1, & u\in[x_i;x_{i+1}),\\ 0, & u\notin[x_i;x_{i+1});\end{cases}$$

$$M_{j.l}(u)=\frac{(w-y_j)M_{j.l-1}(w)}{y_{j+l-1}-y_j}+\frac{(y_{j+l}-w)M_{j+1,l-1}(w)}{y_{j+l}-y_{j+1}},\qquad M_{j,1}(w)=\begin{cases}1, & w\in[y_j;y_{j+1}),\\ 0, & w\notin[y_j;y_{j+1}),\end{cases}$$

де $\{(x_i,y_j);i=\overline{1,n},\, j=\overline{1,m}\}$ – точки, що визначають координати вузлових векторів у відповідних напрямах u та w.

Недоліком застосування (1) в процесі обчислень є те, що кожного разу при переході до нової локальної області визначення просторової моделі виникає необхідність обрахунку функції $N_{i.k}(u)$ та $M_{j,l}(w)$. Не зважаючи на обчислювальну простоту рекурентного завдання наведених базисних функцій, явний вигляд сплайну на основі *B*-сплайнів має перевагу в обчислювальній складності [3]. Зокрема, нехай задано розбиття Δ_{h_t}, Δ_{h_q} осей T і Q точками $t_i=ih_t$, $i\in Z$, $h_t>0$, $q_j=jh_q$, $j\in Z$, $h_q>0$, відповідно до яких задається розбиття Δ_{h_t,h_q} дійсної площини на однакові прямокутні області, кожна з яких визначається координатами лівого нижнього та правого верхнього кута: $\Delta_{h_t,h_q}:\{(ih_t,jh_q),((i+1)h_t,(j+1)h_q);i,j\in Z\}$. Часто є потреба кожну (i,j)-у прямокутну область розбиття Δ_{h_t,h_q} асоціювати з центральною точкою такого прямокутника. В цьому разі доцільно, поряд з Δ_{h_t,h_q}, розглядати сітку вузлів $\tilde{\Delta}_{h_t,h_q}$, визначену точками $t_i=(i+0,5)h_t$, $i\in Z$, $h_t>0$, $q_j=(j+0,5)h_q$, $j\in Z$, $h_q>0$. Нехай у вузлах розбиття Δ_{h_t,h_q} ($\tilde{\Delta}_{h_t,h_q}$) задано значення деякої функції $p(t,q)\in C^{r,r}$: $p_{i,j}$, $i,j\in Z$, причому, будемо вважати, що виконується $p_{i,j}=\overline{p}_{i,j}+\varepsilon_{i,j}$, де $\overline{p}_{i,j}=\frac{1}{h_t h_q}\int\limits_{(i-0,5)h_t}^{(i+0,5)h_t}\int\limits_{(j-0,5)h_q}^{(j+0,5)h_q} p(t,q)\,dtdq$; $\varepsilon_{i,j}$ – деяка похибка.

Тоді, якщо задано системи базисних функцій у вигляді *B*-сплайнів, двовимірний поліноміальний сплайн, що є наближенням функції $p(t,q)$, має вигляд:

$$S_{r,0}(p,t,q)=\sum_{i\in Z}\sum_{j\in Z} p_{i,j}B_{r,h_t}(t-ih_t)B_{r,h_q}(q-jh_q),\ r\geq 2,$$

де $B_{r,h}(t)=\frac{1}{h}\int\limits_{t-h/2}^{t+h/2}B_{r-1,h}(\tau)d\tau$; $B_{0,h}(t)=\begin{cases}0, & t\notin[-h/2;h/2],\\ 1, & t\in[-h/2;h/2];\end{cases}$ $\quad h=h_t,h_q$.

Наприклад при $r=2$ *B*-сплайн другого порядку визначається так [4]:

$$B_{2,h}(g)=\begin{cases}0, & g\notin[-3h/2;3h/2],\\ (3+2g/h)^2/8, & g\in[-3h/2;-h/2],\\ 3/4-(2g/h)^2/4, & g\in[-h/2;h/2],\\ (3-2g/h)^2/8, & g\in[h/2;3h/2],\end{cases} \tag{2}$$

де $g=t,q$; $\quad h=h_t,h_q$. Тоді розгорнуте подання сплайну $S_{2,0}(p,t,q)$ буде таке:

$$\begin{aligned}S_{2,0}(p,t,q)=\frac{1}{64}\Big((1-x)^2(1-y)^2p_{i-1,j-1}+(1-x)^2\left(6-2y^2\right)p_{i-1,j}+(1-x)^2(1+y)^2p_{i-1,j+1}+\\ +\left(6-2x^2\right)(1-y)^2p_{i,j-1}+\left(6-2x^2\right)\left(6-2y^2\right)p_{i,j}+\left(6-2x^2\right)(1+y)^2p_{i,j+1}+\\ +(1+x)^2(1-y)^2p_{i+1,j-1}+(1+x)^2\left(6-2y^2\right)p_{i+1,j}+(1+x)^2(1+y)^2p_{i+1,j+1}\Big),\end{aligned} \tag{3}$$

де $x=\frac{2}{h_t}(t-ih_t)$, $|x|\leq 1$; $\quad y=\frac{2}{h_q}(q-jh_q)$, $|y|\leq 1$.

На відміну від (1), вираз (3) дозволяє зразу отримати наближення функції $p(t,q)\in C^{2,2}$ в будь-якій точці (i,j)-го елементу розбиття $\tilde{\Delta}_{h_t,h_q}$ без додаткових обчислень. Слід відмітити, що обчислювальна схема застосування сплайну $S_{2,0}(p,t,q)$ може бути ще більш швидкодіючою, якщо провести групування відносно x і y [3].

При моделювання поверхонь за використанням (1) та (3) має місце суттєве згладжування вихідних даних. При необхідності наближень, близьких до інтерполяційних в [1] пропонується використання раціональних B-сплайнових поверхонь. У свою чергу, в [3] для вирішення аналогічної задачі пропонується використання обчислювальних схем на основі розкриття функціоналів, на зразок:

$$S_{2,1}(p,t,q)=\sum_{i\in Z}\sum_{j\in Z}\left(p_{i,j}-\frac{1}{6}\Delta_i^2p_{i,j}-\frac{1}{6}\Delta_j^2p_{i,j}+\frac{1}{36}\Delta_{ij}^2p_{i,j}\right)B_{2,h_t}(t-ih_t)B_{2,h_q}(q-jh_q),$$

$$\Delta_i^2p_{i,j}=p_{i-1,j}-2p_{i,j}+p_{i+1,j};\qquad \Delta_j^2p_{i,j}=p_{i,j-1}-2p_{i,j}+p_{i,j+1};$$

$$\Delta_{ij}^2p_{i,j}=\Delta_i^2p_{i,j-1}-2\Delta_i^2p_{i,j}+\Delta_i^2p_{i,j+1}=\Delta_j^2p_{i-1,j}-2\Delta_j^2p_{i,j}+\Delta_j^2p_{i+1,j},$$

при цьому доведено, що для $\forall p(t,q)\in C^{3,3}$ і $\forall\varepsilon>0$ справедлива нерівність

$$\left\| p(t,q) - S_{2,1}(p,t,q) \right\| \le \frac{h_t^3}{12\sqrt{3}} \left\| p'''_{t^3}(t,q) \right\| + \frac{h_q^3}{12\sqrt{3}} \left\| p'''_{q^3}(t,q) \right\| +$$

$$+ \frac{h_t^3 h_q^3}{432} \left\| p^{(5)}_{t^3 q^3}(t,q) \right\| + \varepsilon \cdot \frac{16}{9} \left\| p(t,q) \right\| + \mathrm{o}\left(h^6\right),$$

де $h = \max\left\{h_t, h_q\right\}$.

Використання раціональних *B*-сплайнових поверхонь, окрім обчислення базисних сплайнів на $N_{i.k}(u)$, $M_{j,l}(w)$, вимагає визначення та завдання однорідних координат, на відміну від уточнюючих сплайнів, типу $S_{2,1}(p,t,q)$, що працюють безпосередньо з вихідним масивом даних. Аналізуючи вище сказане, можна стверджувати, що використання сплайнів на основі B-спланйів типу (3), визначених на рівномірних сітках вузлів, має переваги перед загальноприйнятими підходами за кількістю простіших арифметичних операцій в обчислювальних схемах моделювання поверхонь, та за якістю апроксимації, за умови застосування уточнюючих сплайнів типу $S_{2,1}(p,t,q)$.

Постановка задачі. На основі локальних поліноміальних сплайнів від двох змінних, близьких до інтерполяційних у середньому, запропонувати нову інформаційну технологію моделювання поверхонь за даними, визначеними на регулярних нерівномірних сітках вузлів. Технологія має враховувати можливість реалізації у програмному забезпеченні автоматизації обробки даних та побудови графічних образів засобами комп'ютерної графіки.

Виклад основного матеріалу. Нехай задано $\left\{\left(t_{i,j}, q_{i,j}, p_{i,j}\right); i = \overline{1,n},\, j = \overline{1,m}\right\}$ – масив реалізацій функції $p(t,q) \in C^{r,r}$, $r \ge 2$, причому точки $\left(t_{i,j}; q_{i,j}\right)$ визначають деяке регулярне нерівномірне розбиття $\tilde{\Delta}^*$ області визначення $p(t,q)$; $p_{i,j} = \bar{p}_{i,j} + \varepsilon_{i,j}$, де $\bar{p}_{i,j} = \dfrac{1}{D\left(\tilde{\Delta}^*_{i,j}\right)} \iint\limits_{\tilde{\Delta}^*_{i,j}} p(t,q)\,dtdq$; $\varepsilon_{i,j}$ – деяка похибка; $\tilde{\Delta}^*_{i,j}$ – деяка чотирикутна (i,j)-а область $\tilde{\Delta}^*$; $D\left(\tilde{\Delta}^*_{i,j}\right)$ – площа $\tilde{\Delta}^*_{i,j}$.

Визначимо в області зміни параметрів i, j нове рівномірне розбиття $\tilde{\Delta}_{1,1} : (i,j), i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}$, яке поставимо у відповідність розбиттю $\tilde{\Delta}^*$ за правилом: $(i,j) : \left(t_{i,j}, q_{i,j}\right)$; $j : q_j$, $\forall i, j$; у вузлах $\tilde{\Delta}_{1,1}$ i, j - цілі числа, а для будь-якої іншої точки $\tilde{\Delta}_{1,1}$ $i, j \in R$; $\bar{p}_{i,j} = \int\limits_{(i-0{,}5)}^{(i+0{,}5)} \int\limits_{(j-0{,}5)}^{(j+0{,}5)} p(t,q)\,dtdq$. Тоді апроксимація параметризованої функції $p(t,q)$ на розбитті $\tilde{\Delta}_{1,1}$ у вигляді сплайну $S_{2,0}(p,i,j)$ має вигляд (3), але

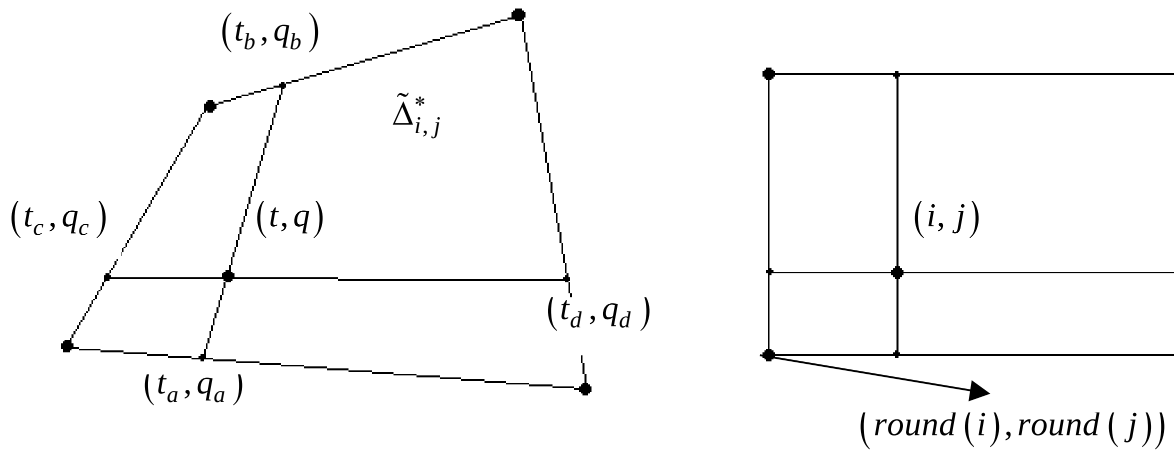
$$x = 2\left(i - round(i)\right),\ |x| \le 1; \qquad y = 2\left(j - round(j)\right),\ |y| \le 1,$$

де $round(i)$; $round(j)$ – значення, отримані за правилами округлення .

Для коректного відображення відтвореної функції $p(t,q)$ залишається визначити взаємну відповідність довільної точки з області зміни параметрів i, j та вихідної області визначення $p(t,q)$. Розглянемо $\tilde{\Delta}^*_{i,j}$ та відповідну (i,j)-у область розбиття $\tilde{\Delta}_{1,1}$ (рис.2). Довільній точці (i, j) з області зміни параметрів i, j відповідає точка (t,q), яка визначається перетином прямих, що проходять, відповідно, через точки (t_a, q_a), (t_b, q_b) та (t_c, q_c), (t_d, q_d):

$$t = \frac{(q_c t_d - q_d t_c)(t_b - t_a) - (q_a t_b - q_b t_a)(t_d - t_c)}{(q_b - q_a)(t_d - t_c) - (q_d - q_c)(t_b - t_a)},$$

$$q = \frac{(t_c q_d - t_d q_c)(q_b - q_a) - (t_a q_b - t_b q_a)(q_d - q_c)}{(t_b - t_a)(q_d - q_c) - (t_d - t_c)(q_b - q_a)}.$$



а) б)

Рис.2. Елементи розбиттів $\tilde{\Delta}^*$ та $\tilde{\Delta}_{1,1}$: а) $\tilde{\Delta}^*_{i,j}$; б) (i, j)-а область $\tilde{\Delta}_{1,1}$.

Координати точок (t_a, q_a), (t_b, q_b), (t_c, q_c), (t_d, q_d) неважко отримати з відповідних пропорцій, отже:

$$t_a = t_{i,j} + (t_{i+1,j} - t_{i,j})(i - round(i)), \quad q_a = q_{i,j} + (q_{i+1,j} - q_{i,j})(i - round(i)),$$

$$t_b = t_{i,j+1} + (t_{i+1,j+1} - t_{i,j+1})(i - round(i)), \quad q_b = q_{i,j+1} + (q_{i+1,j+1} - q_{i,j+1})(i - round(i)),$$

$$t_c = t_{i,j} + (t_{i,j+1} - t_{i,j})(j - round(j)), \quad q_c = q_{i,j} + (q_{i,j+1} - q_{i,j})(j - round(j)),$$

$$t_d = t_{i+1,j} + (t_{i+1,j+1} - t_{i+1,j})(j - round(j)), \quad q_d = q_{i+1,j} + (q_{i+1,j+1} - q_{i+1,j})(j - round(j)).$$

При необхідності реалізації "швидких" алгоритмів відтворення функції $p(t,q)$, можна запропонувати обчислювальні схеми бінарного поповнення, на основі двовимірних сплайнів [3]. Як і раніше, вважаємо, що задано масив $\left\{(t_{i,j,0}, q_{i,j,0}); i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}\right\}$, кожному елементу якого поставлено у відповідність усереднене в області $\tilde{\Delta}^*_{i,j}$ значення функції $p(t,q)$ у вигляді масиву $\left\{p_{i,j,0}\right\}$. Для двократного рекурентного поповнення кількості членів послідовності $\left\{p_{i,j,0}\right\}$ достатньо на кожному κ-му ($\kappa = 1, 2, \ldots$) кроці рекурсії визначити нову, більш згущену сітку вузлів, які можна отримати за формулами: $t_{2i,2j,\kappa} = t_{i,j,\kappa-1}$, $q_{2i,2j,\kappa} = q_{i,j,\kappa-1}$, $t_{2i+1,2j+1,\kappa} = TQ$, $q_{2i+1,2j+1,\kappa} = QT$, причому $p_{2i,2j,\kappa} = p_{i,j,\kappa-1}$, $p_{2i+1,2j+1,\kappa} = B\left(p^{\kappa-1,i,j}\right)$, де

$TQ = TQ\left(t^{\kappa-1,i,j}, q^{\kappa-1,i,j}\right)$, $QT = QT\left(t^{\kappa-1,i,j}, q^{\kappa-1,i,j}\right)$, $B\left(p^{\kappa-1,i,j}\right)$ – функціонали, що побудовано на даних попереднього кроку рекурсії.

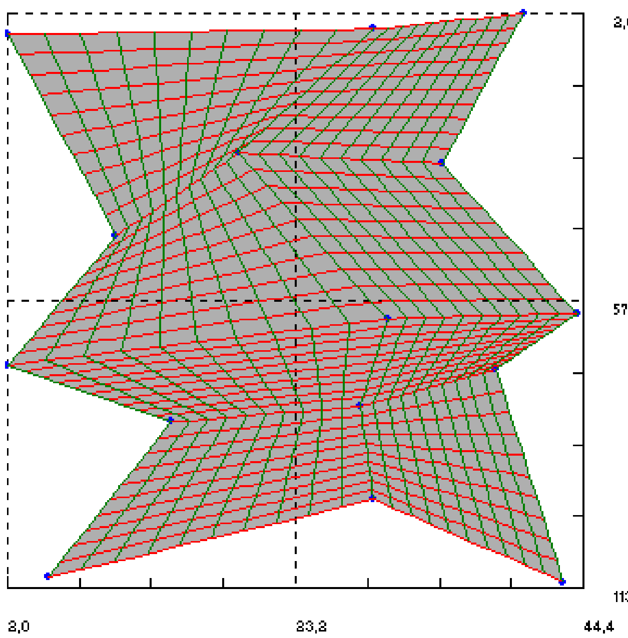
На разі застосування сплайну $S_{2,1}(p,t,q)$, неважко переконатись, що

$$p_{2i+1,2j+1,\kappa}^{(S_{2,1})} = \frac{1}{144}\left(p_{i-1,j-1,\kappa-1} - 7p_{i,j-1,\kappa-1} - 7p_{i+1,j-1,\kappa-1} + p_{i+2,j-1,\kappa-1} - \right.$$
$$-7p_{i-1,j,\kappa-1} + 49p_{i,j,\kappa-1} + 49p_{i+1,j,\kappa-1} - 7p_{i+2,j,\kappa-1} - 7p_{i-1,j+1,\kappa-1} + 49p_{i,j+1,\kappa-1} +$$
$$\left. + 49p_{i+1,j+1,\kappa-1} - 7p_{i+2,j+1,\kappa-1} + p_{i-1,j+2,\kappa-1} - 7p_{i,j+2,\kappa-1} - 7p_{i+1,j+2,\kappa-1} + p_{i+2,j+2,\kappa-1}\right),$$

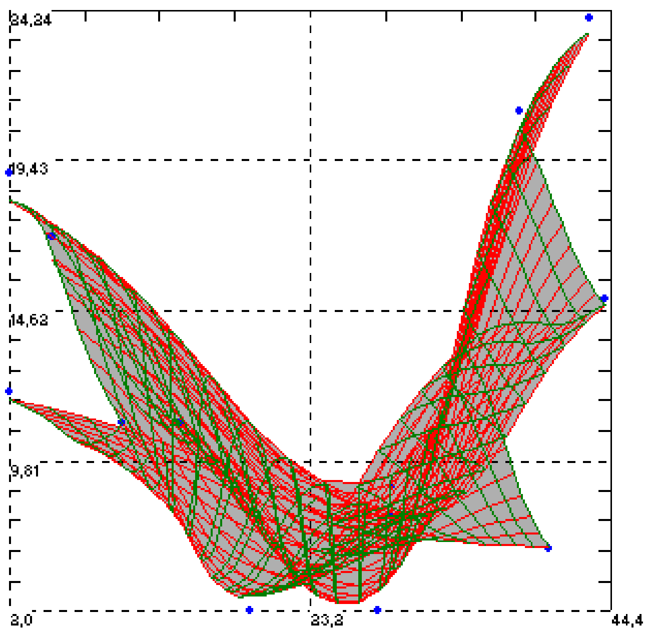
причому координати точки $(t,q)_\kappa$, в якій визначено $p_{2i+1,2j+1,\kappa}^{(S_{2,1})}$, можна визначити, як результат перетину прямих, що проходять через $\left(t_{a,\kappa}, q_{a,\kappa}\right)$, $\left(t_{b,\kappa}, q_{b,\kappa}\right)$ та $\left(t_{c,\kappa}, q_{c,\kappa}\right)$, $\left(t_{d,\kappa}, q_{d,\kappa}\right)$, де

$$t_{a,\kappa} = 0,5\left(t_{i,j,\kappa-1} + \left(t_{i+1,j,\kappa-1} - t_{i,j,\kappa-1}\right)\right), \quad q_{a,\kappa} = 0,5\left(q_{i,j,\kappa-1} + \left(q_{i+1,j,\kappa-1} - q_{i,j,\kappa-1}\right)\right),$$
$$t_{b,\kappa} = 0,5\left(t_{i,j+1,\kappa-1} + \left(t_{i+1,j+1,\kappa-1} - t_{i,j+1,\kappa-1}\right)\right), \quad q_{b,\kappa} = 0,5\left(q_{i,j+1,\kappa-1} + \left(q_{i+1,j+1,\kappa-1} - q_{i,j+1,\kappa-1}\right)\right),$$
$$t_{c,\kappa} = 0,5\left(t_{i,j,\kappa-1} + \left(t_{i,j+1,\kappa-1} - t_{i,j,\kappa-1}\right)\right), \quad q_{c,\kappa} = 0,5\left(q_{i,j,\kappa-1} + \left(q_{i,j+1,\kappa-1} - q_{i,j,\kappa-1}\right)\right),$$
$$t_{d,\kappa} = 0,5\left(t_{i+1,j,\kappa-1} + \left(t_{i+1,j+1,\kappa-1} - t_{i+1,j,\kappa-1}\right)\right), \quad q_{d,\kappa} = 0,5\left(q_{i+1,j,\kappa-1} + \left(q_{i+1,j+1,\kappa-1} - q_{i+1,j,\kappa-1}\right)\right).$$

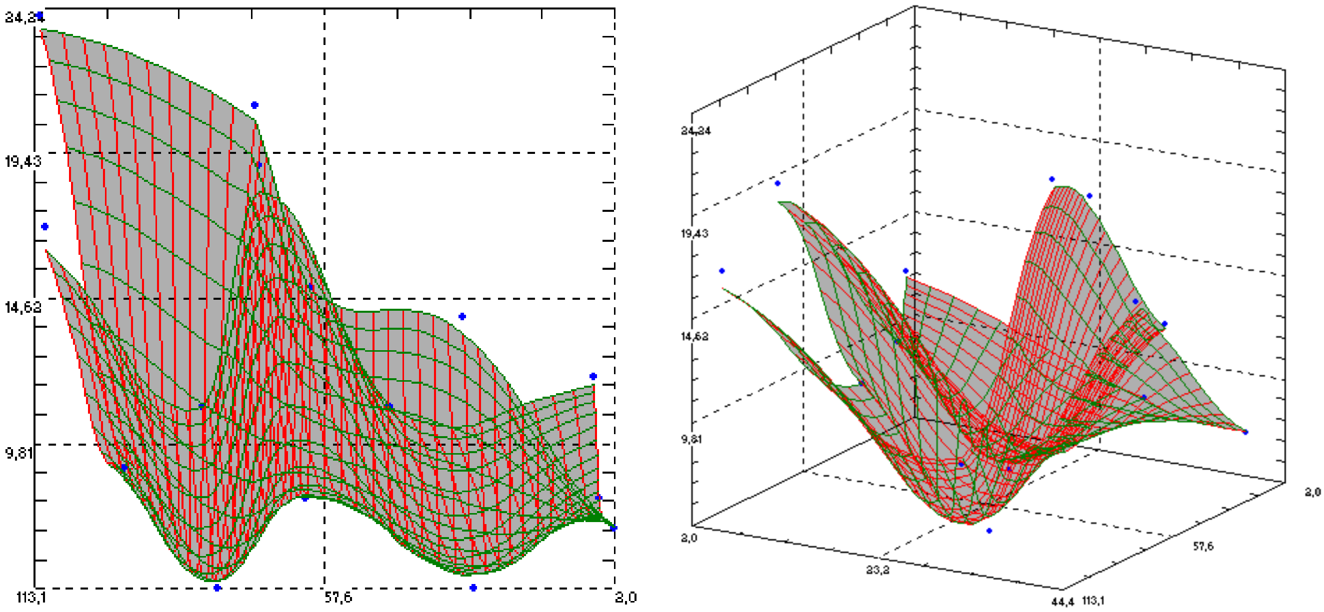
Таким чином, маємо можливість запропонувати нову обчислювальну технологію моделювання поверхонь за даними, визначеними на регулярних нерівномірних сітках вузлів, яка включає відтворення параметризованої поверхні на підставі поліноміальних сплайнів на основі *B*-сплайнів, близьких до інтерполяційних у середньому [3]. Реалізація технології вимагає використання явних виглядів, або алгоритмів бінарного поповнення на основі зазначених сплайнів за розбиттям $\tilde{\Delta}_{1,1}$ та виконання необхідних перетворень для отримання відповідних координат з області визначення деякої гладкої функції $p(t,q)$.



а)



б)



в) г)

Рис.3. Модель поверхні, отримана за даними на нерівномірній сітці вузлів:
а) проекція на площину TOQ; б) проекція на площину POQ;
в) проекція на площину POT; г) просторова модель.

На графіку (рис.3) наведено приклад відтворення двовимірної функції, визначеної на регулярній нерівномірній сітці вузлів масивом: {(6, 2, 12), (5, 29, 8), (2, 40, 7), (45, 10, 11), (29, 19, 5), (31, 34, 14), (70, 2, 19), (61, 30, 8), (60, 44, 15), (81, 14, 11), (78, 28, 5), (71, 38, 21), (111, 5, 17), (96, 29, 9), (112, 43, 24)}.

Висновки. Слід відзначити, що процедура знаходження координат точок (t,q) та $(t,q)_к$ при реалізації обчислювальних схем сплайнів, типу (1) аналогічна. На підставі останнього, а також зважаючи на значно меншу обчислювальну складність реалізацій поліноміальних сплайнів типу $S_{2,0}(p,t,q)$, $S_{2,1}(p,t,q)$, можна стверджувати про досягнення мети роботи, що сформульована при постановці задачі дослідження.

Подальші дослідження можуть бути спрямовані на створення аналогічних інформаційних технологій моделювання $3D$-об’єктів та гіперповерхонь на основі сплайнів більш високої, ніж 2, розмірності.

Бібліографічні посилання

1. **Роджерс Д., Адамс Дж.** Математические основы машинной графики: Пер. с англ. – М.: Мир, 2001. – 604 с., ил.
2. **ДеБор К.** Практическое руководство по сплайнам. – М.: Радио и связь,1985. – 303 с.
3. **Приставка П.О.** Поліномаільні сплайни при обробці даних. Д.: Вид-во Дніпропетр. ун-ту, 2004. – 236 с.
4. **Лигун А.А., Шумейко А.А.** Асимптотические методы восстановления кривых. – К.: ИМ НАУ, 1997. – 358 с.