

ПОБУДОВА КОНТРАСТНИХ ФІЛЬТРІВ ЗА ВИКОРИСТАННЯМ ПОЛІНОМІАЛЬНИХ СПЛАЙНІВ

Розглянуто побудову контрастних фільтрів, що є зворотними до низькочастотних фільтрів, отриманих з використанням локальних поліноміальних сплайнів на основі B -сплайнів, близьких до інтерполяційних у середньому, однієї та двох змінних.

Постановка проблеми. Для цифрованих сигналів, заданих з вадою, поширеним підходом при опрацюванні є застосування операції згладжування даних (рис.1). Обробка згладжених послідовностей відліків функції спостереження дозволяє використання методів опрацювання послідовностей відліків гладких функцій, які, у свою чергу, є досить добре дослідженими та забезпечують адекватність результатів роботи.

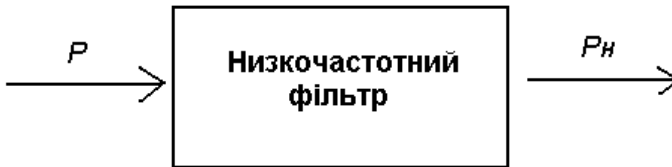


Рис.1. Схема отримання низькочастотної складової P_H з послідовності P .

Зокрема, задача децимації та відтворення низькочастотної складової сигналу може бути вирішена з мінімальними втратами інформації при вдалому виборі ширини вікна низькочастотного фільтру на попередньому етапі згладжування. Якщо не вирішувати подібну задачу для високочастотної складової сигналу (тобто, ігнорувати останню), актуальним є етап контрастування послідовності, шляхом застосування зворотної до згладжування операції (рис.2).



Рис.2. Схема відтворення початкової інформації P за низькочастотною складовою P_n .

Аналіз досліджень та постановка задачі. На разі, коли низькочастотна фільтрація відбувається при застосуванні лінійного фільтру, можливість отримання зворотного перетворення забезпечується шляхом розв'язання елементарної алгебраїчної задачі.

Метою даної статті є отримання зворотних (контрастних) лінійних фільтрів (рис.2, 3) до низькочастотних фільтрів [1], побудованих за використанням локальних поліноміальних сплайнів на основі B -сплайнів, близьких до інтерполяційних у середньому [2].



Рис.3. Схема отримання контрастованої послідовності P_k за початковими даними P .

Нехай $\{t_i\}_{i \in \mathbb{Z}} = \{ih\}_{i \in \mathbb{Z}}$ – рівномірне розбиття Δ_h вісі з кроком $h > 0$ та $P = \{p_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ – послідовність із $l_\infty(R)$ (лінійного простору всіх обмежених послідовностей з нормою $\|P\|_{\infty(R)} = \sup_{i \in \mathbb{Z}} |p_i|$) реалізацій деякої

$p(t)$ функції. Будемо вважати, що реалізації функції – є її усереднені значення на кожному з проміжків $[ih - 0,5h; ih + 0,5h]$, $i \in \mathbb{Z}$,

$$p_i = \bar{p}_i + \varepsilon_i, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad \text{де } \bar{p}_i = \frac{1}{h} \int_{(i-0,5)h}^{(i+0,5)h} p(t) dt - \text{усереднене значення } p(t)$$

на i -му елементі Δ_n ; ε_i – похибка, крім того – $p(t) \in C^k$, $k=1, 2, \dots$

Низькочастотна послідовність $P_n = \{p_n^i\}_{i \in Z}$ може бути визначена на підставі лінійних функціоналів типу:

$$p_n^i = L(p^i), \quad i \in Z,$$

прикладями функціоналів можуть бути наступні подання:

$$L(p^i) = \sum_{j=i-1}^{i+1} \gamma_n^{(S_{r,0})} p_j, \quad L(p^i) = \sum_{j=i-2}^{i+2} \gamma_n^{(S_{4,0})} p_j,$$

де $\gamma_n^{(S_{r,0})}$, $r=2, 3, 4$ – маски фільтрів, отриманих на основі сплайнів $S_{r,0}(p, t)$, $r=2, 3, 4$ [2];

$$\gamma_n^{(S_{2,0})} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \gamma_n^{(S_{3,0})} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \gamma_n^{(S_{4,0})} = \frac{1}{384} \begin{pmatrix} 1 \\ 76 \\ 230 \\ 76 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Зворотна задача застосування контрастних фільтрів (фільтрів, які є зворотними до введених низькочастотних) може бути описана так. Якщо

$$p_n^i = L(p^i), \quad i \in Z,$$

то

$$p_i = C(p_n^i), \quad i \in Z,$$

де $C(p^{i,j})$ - функціонали типу:

$$C(p^i) = \sum_{j=i-2}^{i+2} \gamma_k^{(S_{r,0})} p_j, \quad r=2, 3, \quad C(p^i) = \sum_{j=i-4}^{i+4} \gamma_k^{(S_{4,0})} p_j,$$

при цьому визначення потребують саме $\gamma_k^{(S_{r,0})}$, $r=2, 3, 4$.

Виклад основного матеріалу. Нехай після застосування лінійного фільтру а основі сплайну $S_{2,0}(p, t)$ отримано послідовність

$$P_n^{(S_{2,0})} = \left\{ p_i^{(S_{2,0})} \right\}_{i \in Z}.$$

Мають місце наступні вирази для довільних індексів $i-1, i, i+1$ послідовності P :

$$\begin{aligned}
 p n_{i-1}^{(S_{2,0})} &= \frac{1}{8} p_{i-2} + \frac{3}{4} p_{i-1} + \frac{1}{8} p_i, \\
 p n_i^{(S_{2,0})} &= \frac{1}{8} p_{i-1} + \frac{3}{4} p_i + \frac{1}{8} p_{i+1}, \\
 p n_{i+1}^{(S_{2,0})} &= \frac{1}{8} p_i + \frac{3}{4} p_{i+1} + \frac{1}{8} p_{i+2}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Віднайдемо коефіцієнти A, B, C зворотного перетворення, що забезпечує отримання послідовності $P_K^{(S_{2,0})} = \left\{ p k_i^{(S_{2,0})} \right\}_{i \in Z}$:

$$p k_i^{(S_{2,0})} = A \cdot p n_{i-1}^{(S_{2,0})} + B \cdot p n_i^{(S_{2,0})} + C \cdot p n_{i+1}^{(S_{2,0})}, \quad i \in Z, \tag{2}$$

так, щоб по можливості

$$p k_i^{(S_{2,0})} = p_i, \quad i \in Z.$$

Підставляючи вирази (1) в (2), буде вірним:

$$p_i = \frac{A}{8} p_{i-2} + \left(\frac{3A}{4} + \frac{B}{8} \right) p_{i-1} + \left(\frac{A}{8} + \frac{3B}{4} + \frac{C}{8} \right) p_i + \left(\frac{B}{8} + \frac{3C}{4} \right) p_{i+1} + \frac{C}{8} p_{i+2}.$$

Припускаючи однозначність зворотної операції, отримаємо наступну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{A}{8} = 0, \\ \frac{3A}{4} + \frac{B}{8} = 0, \\ \frac{A}{8} + \frac{3B}{4} + \frac{C}{8} = 1, \\ \frac{B}{8} + \frac{3C}{4} = 0, \\ \frac{C}{8} = 0. \end{array} \right.$$

Дана система не сумісна, на відміну від наступної:

$$\left\{ \begin{array}{l} 6A + B = 0, \\ A + 6B + C = 8, \\ B + 6C = 0, \end{array} \right.$$

розв'язок якої

$$\begin{cases} A = -\frac{4}{17}, \\ B = \frac{24}{17}, \\ C = -\frac{4}{17}. \end{cases}$$

Отже, вираз (2) набуває вигляду:

$$p\kappa_i^{(S_{2,0})} = -\frac{4}{17} \cdot p\eta_{i-1}^{(S_{2,0})} + \frac{24}{17} \cdot p\eta_i^{(S_{2,0})} - \frac{4}{17} \cdot p\eta_{i+1}^{(S_{2,0})}, \quad i \in Z. \quad (3)$$

Неважко переконатись, що похибка δ_i , $i \in Z$ після операцій низько-частотної фільтрації та зворотного перетворення дорівнює

$$\delta_i = -\frac{1}{34}(p_{i-2} + p_{i+2}).$$

Зважаючи, що

$$\left| \frac{1}{34} \left(p\eta_{i-2}^{(S_{2,0})} + p\eta_{i+2}^{(S_{2,0})} \right) \right| \leq |\delta_i|,$$

вираз (3) можна подати так:

$$p\kappa_i^{(S_{2,0})} = \frac{1}{34} p\eta_{i-2}^{(S_{2,0})} - \frac{4}{17} \cdot p\eta_{i-1}^{(S_{2,0})} + \frac{24}{17} \cdot p\eta_i^{(S_{2,0})} - \frac{4}{17} \cdot p\eta_{i+1}^{(S_{2,0})} + \frac{1}{34} p\eta_{i+2}^{(S_{2,0})}. \quad (4)$$

З аналогічних міркувань не важко отримати наступні співвідношення, зворотні до операції низько-частотної фільтрації з використанням фільтрів на основі сплайнів $S_{3,0}(p, t)$, $S_{4,0}(p, t)$:

$$p\kappa_i^{(S_{3,0})} = \frac{1}{14} p\eta_{i-2}^{(S_{3,0})} - \frac{3}{7} \cdot p\eta_{i-1}^{(S_{3,0})} + \frac{12}{7} \cdot p\eta_i^{(S_{3,0})} - \frac{3}{7} \cdot p\eta_{i+1}^{(S_{3,0})} + \frac{1}{14} p\eta_{i+2}^{(S_{3,0})}, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} p\kappa_i^{(S_{4,0})} = & -0,00067154 p\eta_{i-4}^{(S_{4,0})} - 0,0492947 p\eta_{i-3}^{(S_{4,0})} + 0,25787256 p\eta_{i-2}^{(S_{4,0})} - \\ & - 0,80938034 p\eta_{i-1}^{(S_{4,0})} + 2,20221768 p\eta_i^{(S_{4,0})} - 0,80938034 p\eta_{i+1}^{(S_{4,0})} + \\ & + 0,25787256 p\eta_{i+2}^{(S_{4,0})} - 0,04892947 p\eta_{i+3}^{(S_{4,0})} - 0,00067154 p\eta_{i+4}^{(S_{4,0})}. \end{aligned} \quad (6)$$

Остаточно подання (4)-(6) можна записати у вигляді:

$$p\kappa_i^{(S_{r,0})} = \sum_{j=i-2}^{i+2} \gamma\kappa_j^{(S_{r,0})} p\eta_j^{(S_{r,0})}, \quad r=2,3,$$

$$p\kappa_i^{(S_{4,0})} = \sum_{j=i-4}^{i+4} \gamma\kappa_j^{(S_{4,0})} p\eta_j^{(S_{4,0})},$$

де

$$\gamma\kappa^{(S_{2,0})} = \frac{1}{34} \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 48 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \gamma\kappa^{(S_{3,0})} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 24 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\gamma\kappa^{(S_{4,0})} = \begin{pmatrix} -0,00067154 \\ -0,04892947 \\ 0,25787256 \\ -0,80938034 \\ 2,20221768 \\ -0,80938034 \\ 0,25787256 \\ -0,04892947 \\ -0,00067154 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно одновимірного випадку, розглянемо задачу опрацювання двовимірної послідовності $\{p_{i,j}\}_{i,j \in \mathbb{Z}}$ із $l_\infty(R_2)$ реалізацій деякої

$p(t, q)$ функції на розбитті $\Delta_{h,h} : \{(t_i, q_j)\}_{i,j \in \mathbb{Z}} = \{(ih, jh)\}_{i,j \in \mathbb{Z}}, \quad h > 0,$

при цьому $p_{i,j} = \bar{p}_{i,j} + \varepsilon_{i,j}, \quad i, j \in \mathbb{Z},$ де

$$\bar{p}_{i,j} = \frac{1}{h^2} \int_{(i-0,5)h}^{(i+0,5)h} \int_{(j-0,5)h}^{(j+0,5)h} p(t, q) dt dq; \quad \varepsilon_{i,j} - \text{похибка.}$$

Можливість застосування низькочастотних лінійних фільтрів [1] забезпечується функціоналами наступного типу:

$$p\eta_{i,j}^{(S_{r,0})} = \sum_{i_r=i-1}^{i+1} \sum_{j_q=j-1}^{j+1} \gamma\eta_{2,i_r,j_q}^{(S_{r,0})} p_{i,j}, \quad r=2,3,$$

$$pH_{i,j}^{(S_{4,0})} = \sum_{i=i-2}^{i+2} \sum_{j_q=j-2}^{j+2} \gamma H_{2,i,j_q}^{(S_{4,0})} p_{i,j_q}.$$

$$\text{де } \gamma H_2^{(S_{2,0})} = \frac{1}{64} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 6 & 36 & 6 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma H_2^{(S_{3,0})} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\gamma H_2^{(S_{4,0})} = \frac{1}{147456} \begin{pmatrix} 1 & 76 & 230 & 76 & 1 \\ 76 & 5776 & 17480 & 5776 & 76 \\ 230 & 17480 & 52900 & 17480 & 230 \\ 76 & 5776 & 17480 & 5776 & 76 \\ 1 & 76 & 230 & 76 & 1 \end{pmatrix}.$$

Неважко переконатись, що побудова зворотних фільтрів у двовимірному випадку може здійснюватись на підставі наступних функціоналів:

$$pK_{i,j}^{(S_{r,0})} = \sum_{i=i-2}^{i+2} \sum_{j_q=j-2}^{j+2} \gamma K_{2,i,j_q}^{(S_{r,0})} p_{i,j_q}, \quad r=2,3,$$

$$pK_{i,j}^{(S_{4,0})} = \sum_{i=i-4}^{i+4} \sum_{j_q=j-4}^{j+4} \gamma K_{2,i,j_q}^{(S_{4,0})} p_{i,j_q},$$

де

$$\gamma K_2^{(S_{2,0})} = \frac{1}{1156} \begin{pmatrix} 1 & -8 & 48 & -8 & 1 \\ -8 & 64 & -384 & 64 & -8 \\ 48 & -384 & 2304 & -384 & 48 \\ -8 & 64 & -384 & 64 & -8 \\ 1 & -8 & 48 & -8 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\gamma K_2^{(S_{3,0})} = \frac{1}{196} \begin{pmatrix} 1 & -6 & 24 & -6 & 1 \\ -6 & 36 & -144 & 36 & -6 \\ 24 & -144 & 576 & -144 & 24 \\ -6 & 36 & -144 & 36 & -6 \\ 1 & -6 & 24 & -6 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\gamma\kappa_2^{(S_{4,0})} = \begin{pmatrix} 0,000000451 & 0,000032858 & -0,000173172 & 0,000543531 & -0,001478877 & \dots \\ 0,000032858 & 0,002394093 & -0,012617568 & 0,039602551 & -0,107753344 & \dots \\ -0,000173172 & -0,012617568 & 0,066498257 & -0,20871698 & 0,567891511 & \dots \\ 0,000543531 & 0,039602551 & -0,20871698 & 0,655096535 & -1,782431695 & \dots \\ -0,001478877 & -0,107753344 & 0,567891511 & -1,782431695 & 4,84976271 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

де, задля економії місця, для $\gamma\kappa_2^{(S_{4,0})}$ приводяться коефіцієнти з індексами

$$\begin{pmatrix} (i-4, j-4) & (i-4, j-3) & (i-4, j-2) & (i-4, j-1) & (i-4, j) & \dots \\ (i-3, j-4) & (i-3, j-3) & (i-3, j-2) & (i-3, j-1) & (i-3, j) & \dots \\ (i-2, j-4) & (i-2, j-3) & (i-2, j-2) & (i-2, j-1) & (i-2, j) & \dots \\ (i-1, j-4) & (i-1, j-3) & (i-1, j-2) & (i-1, j-1) & (i-1, j) & \dots \\ (i, j-4) & (i, j-3) & (i, j-2) & (i, j-1) & (i, j) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

а інші визначаються з урахуванням симетрії матриці $\gamma\kappa_2^{(S_{4,0})}$.

Висновки. В роботі одержано одно- та двовимірні контрастні фільтри, що є зворотними до лінійних низькочастотних фільтрів, отриманих з використанням сплайнів відповідної розмірності на основі B -сплайнів, близьких до інтерполяційних у середньому. Обчислювальні схеми, що можуть бути побудовані на підставі запропонованих лінійних функціоналів, задовольнятимуть вимозі функціонування програмного забезпечення в режимі реального часу.

Отримані результати можуть біти використані при вирішенні задач цифрової обробці сигналів та зображень. Подальші дослідження можна зосередити на розробці відповідних інформаційних та обчислювальних технологій, з урахуванням одержаних функціоналів.

Бібліографічні посилання

1. **Приставка П.О.** Обчислювальні аспекти застосування поліноміальних сплайнів при побудові фільтрів / Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій.- Д.: Вид-во Дніпропетр. ун-ту.- 2006. -Т.10. – С.3-14.
2. **Приставка П.О.** Поліноміальні сплайни при обробці даних. Д.: Вид-во Дніпропетр. ун-ту, 2004. – 236 с

Надійшла до редколегії 26.04.07.