УДК 519.652:519.254

П.О.Приставка

Дніпропетровський національний університет

ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ АСПЕКТИ ЗАСТОСУВАННЯ ПОЛІНОМІАЛЬНИХ СПЛАЙНІВ ПРИ ПОБУДОВІ ФІЛЬТРІВ

Розглянуто побудову низькочастотних та високочастотних фільтрів з використанням локальних поліноміальних сплайнів на основі *B*-сплайнів, близьких до інтерполяційних у середньому, однієї та двох змінних.

Постановка проблеми. Останні дисятиріччя при розв’язанні задач обробки цифрованих зображень, опрацювання сигналів, тощо, розвиток отримали методи, що базуються на обчислювальному аспекті, зокрема кратномасштабний аналіз. При опрацюванні дискретних даних набули поширення процедури основані на бінарному поповненні послідовностей відліків деяких функцій та різного роду вейвлет-перетвореня. Проте, все ще актуальним залишається розвиток відомих методів цифрової обробки сигналів, з урахуванням сучасних досягнень у сфері обчислювальних технологій.

В багатьох додатках (зокрема, аналіз зображень) застосування схеми двоканальної субсмугової фільтрації суттєво може впливати на результат стиснення та квантування. Більш того, існує надія, що за допомогою спеціально побудованих фільтрів спотворення через квантування можна суттєво зменшити, що дозволить досягати значного коефіцієнта стиснення [1, с.230].

У зв’язку з останнім, слід зазначити можливість застосування вейвлетів в контексті фільтрації, проте не важко показати, що обчислювальна складність використання поліноміальних сплайнів є аналогічною, крім того самі ці сплайни часто використовують при «побудові» вейвлетів [2]. Перевагою при застосуванні саме сплайнів в означеній задачі може бути високі апроксимативні властивості сплайн-операторів, близьких до інтерполяційних, причому, при обробці сигналів (в тому числі і цифрованих зображень),поданих, за всяк час, з вадою, перевага за операторами, що є близькими до інтерполяційних у середньому.

Саме отриманню швидкодіючих процедур низько- та високочастотної фільтрації даних на підставі зазначених сплайн-операторів присвячено роботу.

Аналіз досліджень та постановка задачі. Задача відтворення гладких функцій на основі лінійних комбінацій *B*-сплайнів висвітлено у досить багатьох роботах І.Шоенберга, К.Де Бора, М.П.Корнійчука та ін. Увагу поліноміальним сплайнам, визначеним на локальних носіях, близьким до інтерполяційних у середньому, приділено А.О.Лигуном [3] та у авторських дослідженнях [4].

Застосування сплайнів, близьких до інтерполяційних, в задачах фільтрації та кратномаштабного аналізу розлого подано в сучасній літературі. Серед російськомовних видань достатньо вказати роботи [1; 2], де є широкий перелік відповідних посилань. Подання одновимірних сплайнів на основі *B*-сплайнів, близьких до інтерполяційних у середньому, що так, чи інакше можуть бути використані при побудові фільтрів, можна знайти в роботах [3–6]. Для побудови фільтру по усередненим значенням деякої двовимірної функції $f(t,q)$, заданої на рівномірному розбитті, в роботах [7, 8] пропонується функціонал на підставі апроксимації поліномом

$$P(f,t,q)=a+b\cdot t+c\cdot q+d\cdot tq+e\cdot t^2+f\cdot q^2,$$

де a,b,c,d,e,f – деякі дійсні коефіцієнти.

Повертаючись до сплайнів, однієї змінної відзначимо, що мають місце наступні визначення [3; 4]. Нехай з кроком $h>0$ задано розбиття дійсної вісі $\Delta_h : t_i = ih$, $i\in Z$, у кожній точці якого отримано значення деякої неперервної функції $p(t)\in C^r$, $r\geq 2$, визначеної на $R_1(-\infty;\infty)$. Вважають, що інформація про функцію $p(t)$, яка підлягає відтворенню, задано у вузлах розбиття Δ_h у вигляді інтеграла $\overline{p}_i=\frac{1}{h}\int\limits_{(i-0,5)h}^{(i+0,5)h} p(t)\,dt$, при цьому, істинне значення функції $p(t)$ у вузлах визначається так:

$$p_i=\overline{p}_i+\varepsilon_i,\; i\in Z, \tag{1}$$

де ε_i – похибка.

Для апроксимації функції $p(t)$ за значеннями типу (1) у вузлах розбиття Δ_h, вводяться такі поліноміальні сплайни на основі *B*-сплайнів, що є близькими до інтерполяційних у середньому:

$$S_{r,0}(p,t)=\sum_{i\in Z} p_i B_{r,h}\left(t-(i+0,5)h\right),\; r=2,4, \quad S_{3,0}(p,t)=\sum_{i\in Z} p_i B_{3,h}(t-ih),$$

де, наприклад, *B*-сплайн другого порядку $B_{2,h}(t)$ визначається так:

$$B_{2,h}(t)=\begin{cases} 0, & t\notin[-3h/2;3h/2],\\ (3+2t/h)^2/8, & t\in[-3h/2;-h/2],\\ 3/4-(2t/h)^2/4, & t\in[-h/2;h/2],\\ (3-2t/h)^2/8, & t\in[h/2;3h/2]. \end{cases} \tag{2}$$

Слід відмітити, що подання зазначених сплайнів у вигляді лінійної комбінації *B*-сплайнів не зовсім зручне для реалізації в обчислювальному середовищі. Для зменшення обчислювальної складності є можливість подати сплайни у явному вигляді. Наприклад, якщо ввести заміну $x=2\left(t-(i+0,5)h\right)/h$, $|x|\leq 1$, то, з урахуванням (2), сплайн $S_{2,0}(p,t)$, має вигляд:

$$S_{2,0}(p,t)=(p_{i-1}-2p_i+p_{i+1})x^2/8+(-p_{i-1}+p_{i+1})x/4+(p_{i-1}+6p_i+p_{i+1})/8. \tag{3}$$

Якщо $\left\|S_{r,0}(p,t)\right\|=\sup\limits_{|\varepsilon_i|}\max\limits_{t}\left|S_{r,0}(\varepsilon,t)\right|$ – норма сплайн-оператора $S_{r,0}(p,t)$, то справедливі ствердження: $\left\|S_{r,0}(p,t)\right\|=\left\|p(t)\right\|$. Слід відмітити, що $\left\|S_{r,0}(p,t)\right\|$ – це величина, яка характеризує в скільки разів може зрости похибка при відтворенні функції за допомогою сплайну, якщо значення p_i задані з похибкою. Отже, норма сплайн-оператора характеризує стійкість відтворення функції $p(t)$.

Про похибку відтворення функції $p(t)$ за використанням сплайнів $S_{r,0}(p,t)$, $r=2,3,4$ свідчать наступні твердження.

При $h\to 0$ для довільної функції $p(t)\in C^2$ виконується

$$\left\| p(t)-S_{2,0}(p,t)\right\| = h^2\left\| p''(t)\right\|/6+\varepsilon\left\| p(t)\right\|+\mathrm{o}\left(h^2\right),$$

$$\left\| p(t)-S_{3,0}(p,t)\right\| = 5h^2\left\| p''(t)\right\|/24+\varepsilon\left\| p(t)\right\|+\mathrm{o}\left(h^2\right),$$

$$\left\| p(t)-S_{4,0}(p,t)\right\| = h^2\left\| p''(t)\right\|/4+\varepsilon\left\| p(t)\right\|+\mathrm{o}\left(h^2\right).$$

Двовимірні сплайни, близькі до інтерполяційних у середньому визначаються наступним чином [4]. Зафіксуємо два розбиття Δ_{h_t}, Δ_{h_q} осей T і Q точками $t_i = ih_t$, $i\in Z$, $h_t>0$, $q_j = jh_q$, $j\in Z$, $h_q>0$, відповідно до яких задається розбиття Δ_{h_t,h_q} дійсної площини R_2. Нехай у вузлах розбиття Δ_{h_t,h_q} задано значення деякої функції $p(t,q)\in C^{r,r}$, $r_1,r_2\geq 2$: $p_{i,j}$, $i,j\in Z$, причому, вважається що $p_{i,j}=\overline{p}_{i,j}+\varepsilon_{i,j}$, де $\varepsilon_{i,j}$ – деяка похибка;

$$\overline{p}_{i,j}=\frac{1}{h_t h_q}\int\limits_{(i-0{,}5)h_t}^{(i+0{,}5)h_t}\int\limits_{(j-0{,}5)h_q}^{(j+0{,}5)h_q} p(t,q)\,dt\,dq.$$

Тоді, двовимірний поліноміальний сплайн, близький до інтерполяційного у середньому можна визначити наступним чином:

$$S_{r,0}(p,t,q)=\sum_{i\in Z}\sum_{j\in Z} p_{i,j}B_{r,h_t}\left(t-(i+0{,}5)h_t\right)B_{r,h_q}\left(q-(j+0{,}5)h_q\right),\ r\geq 2.$$

Наприклад, явний вигляд сплайну $S_{2,0}(p,t,q)$, з урахуванням (2) такий:

$$\begin{aligned} S_{2,0}(p,t,q)=\frac{1}{64}\Big(&(1-x)^2(1-y)^2\,p_{i-1,j-1}+(1-x)^2\left(6-2y^2\right)p_{i-1,j}+\\ &+(1-x)^2(1+y)^2\,p_{i-1,j+1}+\left(6-2x^2\right)(1-y)^2\,p_{i,j-1}+\left(6-2x^2\right)\left(6-2y^2\right)p_{i,j}+\\ &+\left(6-2x^2\right)(1+y)^2\,p_{i,j+1}+(1+x)^2(1-y)^2\,p_{i+1,j-1}+(1+x)^2\left(6-2y^2\right)p_{i+1,j}+\\ &+(1+x)^2(1+y)^2\,p_{i+1,j+1}\Big), \end{aligned}\tag{4}$$

де $x=2\left(t-(i+0{,}5)h_t\right)/h_t$, $|x|\leq 1$, $y=2\left(q-(j+0{,}5)h_q\right)/h_q$, $|y|\leq 1$.

Якщо $\left\|S_{r,0}(p,t,q)\right\|=\sup\limits_{|\varepsilon_{i,j}|}\max\limits_{t,q}\left|S_{r,0}(\varepsilon,t,q)\right|$ – норма сплайна $S_{r,0}(p,t,q)$, то

$$\left\|S_{r,0}(p,t,q)\right\|=\left\|p(t,q)\right\|,\ r\geq 2,$$

крім того, наприклад, при $r=2$, для $\forall p(t,q)\in C^{2,2}$ і $\forall\varepsilon>0$ має місце

$$\begin{aligned} \left\|p(t,q)-S_{2,0}(p,t,q)\right\|\leq h_t^2\left\|p''_{t^2}(t,q)\right\|/6+h_q^2\left\|p''_{q^2}(t,q)\right\|/6+\\ +h_t^2h_q^2\left\|p^{(4)}_{t^2q^2}(t,q)\right\|/36+\varepsilon\cdot\left\|p(t,q)\right\|+\mathrm{o}\left(h^4\right), \end{aligned}$$

де $h=\max\left\{h_t,h_q\right\}$.

Навівши відомі положення про поліноміальні сплайни, близькі до інтерполяційних у середньому, поставимо за мету у подальшому викладенні показати можливість одержання фільтрів одно- та двовимірних даних на підставі алгоритмізації обчислювальних схем сплайнів відповідної розмірності, тим самим поширюючи властивості останніх на шукані, або вже відомі процедури.

Виклад основного матеріалу. Приклади (3), (4) розгорнутого представлення сплайнів дозволяють чітко простежити, що оператори, які розглядаються, справді є поліномами. Отже, для одновимірних сплайнів на основі *B*-сплайнів, близьких до інтерполяційних у середньому справедливе наступне подання [4]:

$$S_{r,0}(p,t)=\sum_i p_i \sum_{c=0}^{r} \gamma_{i,c}^{(r,0)} x^c, \tag{5}$$

де $x=2\big(t-(i+0,5)h\big)/h$, $|x|\le 1$, при $r=2,4$; $x=2(t-ih)/h$, $|x|\le 1$, при $r=3$;

$$\gamma^{(2,0)}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 6 & 0 & -2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix};\qquad \gamma^{(3,0)}=\frac{1}{48}\begin{pmatrix}1 & -3 & 3 & -1\\ 23 & -15 & -3 & 3\\ 23 & 15 & -3 & -3\\ 1 & 3 & 3 & 1\end{pmatrix};$$

$$\gamma^{(4,0)}=\frac{1}{384}\begin{pmatrix}1 & -4 & 6 & -4 & 1\\ 76 & -88 & 24 & 8 & -4\\ 230 & 0 & -60 & 0 & 6\\ 76 & 88 & 24 & -8 & -4\\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1\end{pmatrix}, \tag{6}$$

для двовимірних –

$$S_{r,0}(p,t,q)=\sum_{i\in Z}\sum_{j\in Z} p_{i,j}\sum_{c_t=0}^{r}\sum_{c_q=0}^{r}\gamma_{i,c_t}^{(r,0)}\gamma_{j,c_q}^{(r,0)}x^{c_t}y^{c_q}, \tag{7}$$

де $x=2\big(t-(i+0,5)h_t\big)/h_t$, $|x|\le 1$, $y=2\big(q-(j+0,5)h_q\big)/h_q$, $|y|\le 1$, при $r=2,4$;

$x=2(t-ih_t)/h_t$, $|x|\le 1$, $y=2\big(q-jh_q\big)/h_q$, $|y|\le 1$, при $r=3$;

$\gamma_{a,b}^{(r,0)}$ – визначаються із (6).

Враховуючи наведену в аналізі якість апроксимації сплайнами гладких функцій, для знаходження низькочастотних фільтрів нас, в першу чергу, буде цікавити значення сплайн-операторів у вузлах розбиттів Δ_h та Δ_{h_t,h_q}. В цьому разі, для $r=2,4$, при $x=0$, та для $r=3$, при $x=1$, подання (5) набуває вигляду:

$$S_{2,0}(p,ih)=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}1\\6\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}p_{i-1} & p_i & p_{i+1}\end{pmatrix}=\sum_{j=i-1}^{i+1}\gamma H_{1,j}^{(S_{2,0})}p_j, \tag{8}$$

$$S_{3,0}(p,ih)=\sum_{j=i-1}^{i+1}\gamma H_{1,j}^{(S_{3,0})}p_j \qquad S_{4,0}(p,ih)=\sum_{j=i-2}^{i+2}\gamma H_{1,j}^{(S_{4,0})}p_j, \tag{9}$$

де $\gamma H_1^{(S_{2,0})}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}1\\6\\1\end{pmatrix}$, $\gamma H_1^{(S_{3,0})}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}$, $\gamma H_1^{(S_{4,0})}=\frac{1}{384}\begin{pmatrix}1\\76\\230\\76\\1\end{pmatrix}$, а подання (7) надає функціонали:

$$S_{r,0}\left(p,ih_t,jh_q\right)=\sum_{i_t=i-1}^{i+1}\sum_{j_q=j-1}^{j+1}\gamma н_{2,i_t,j_q}^{\left(S_{r,0}\right)}p_{i_t,j_q},\ r=2,3,$$

$$S_{4,0}\left(p,ih_t,jh_q\right)=\sum_{i_t=i-2}^{i+2}\sum_{j_q=j-2}^{j+2}\gamma н_{2,i_t,j_q}^{\left(S_{4,0}\right)}p_{i_t,j_q}. \tag{10}$$

де $\gamma н_2^{\left(S_{2,0}\right)}=\frac{1}{64}\begin{pmatrix}1&6&1\\6&36&6\\1&6&1\end{pmatrix}$, $\gamma н_2^{\left(S_{3,0}\right)}=\frac{1}{36}\begin{pmatrix}1&4&1\\4&16&4\\1&4&1\end{pmatrix}$,

$$\gamma н_2^{\left(S_{4,0}\right)}=\frac{1}{147456}\begin{pmatrix}1&76&230&76&1\\76&5776&17480&5776&76\\230&17480&52900&17480&230\\76&5776&17480&5776&76\\1&76&230&76&1\end{pmatrix}.$$

Для отримання швидкодіючих обчислювальних схем достатньо розлого подати (8-10) з найменшою кількістю арифметичних операцій. Наприклад, для (8) має місце подання лише з чотирма операціями:

$$S_{2,0}\left(p,ih\right)=\left(p_{i-1}+6\cdot p_i+p_{i+1}\right)/8, \tag{11}$$

а для $S_{2,0}\left(p,ih_t,jh_q\right)$ отримуємо функціонал з дванадцятьма операціями:

$$S_{2,0}\left(p,ih_t,jh_q\right)=\left(p_{i-1,j-1}+6\cdot p_{i-1,j}+p_{i-1,j+1}+6\cdot p_{i,j-1}+36\cdot p_{i,j}+6\cdot p_{i,j+1}+\right.$$
$$\left.+p_{i+1,j-1}+6\cdot p_{i+1,j}+p_{i+1,j+1}\right)/64. \tag{12}$$

На прикладі виразів (13), (14) можна наочно переконатись у наявності властивості згладжування даних, відомій для сплайнів, що розглядаються:

$$S_{2,0}\left(p,ih\right)=\frac{1}{8}p_{i-1}+\frac{3}{4}p_i+\frac{1}{8}p_{i+1}=p_i+\frac{1}{8}\Delta^2 p_i,$$

де $\Delta^2 p_i=p_{i-1}-2p_i+p_{i+1}$,

$$S_{2,0}\left(p,ih_t,jh_q\right)=p_{i,j}+\frac{1}{8}\Delta_i p_{i,j}+\frac{1}{8}\Delta_j p_{i,j}+\frac{1}{64}\Delta_{i,j}p_{i,j},$$

де $\Delta_i^2 p_{i,j}=p_{i-1,j}-2p_{i,j}+p_{i+1,j}$; $\Delta_j^2 p_{i,j}=p_{i,j-1}-2p_{i,j}+p_{i,j+1}$;

$$\Delta_{ij}^2 p_{i,j}=\Delta_i^2 p_{i,j-1}-2\Delta_i^2 p_{i,j}+\Delta_i^2 p_{i,j+1}=\Delta_j^2 p_{i-1,j}-2\Delta_j^2 p_{i,j}+\Delta_j^2 p_{i+1,j}.$$

Високочастотні фільтри на основі розглянутих сплайнів неважко отримати з рівності

$$p_i=pн_i+pв_i,\ i\in Z,$$

де $pн_i$, $pв_i$ - низько- та високочастотні складові. Якщо за $pн_i$ обрати значення сплайнів у вузлах розбиттів Δ_h та Δ_{h_t,h_q},

$$pн_i=S_{r,0}\left(p,ih\right)=pн_i^{\left(S_{r,0}\right)},\qquad pн_{i,j}=S_{r,0}\left(p,ih_t,jh_q\right)=pн_{i,j}^{\left(S_{r,0}\right)},\ r=2,3,4,$$

то тоді мають місце наступні співвідношення для отримання високочастотних фільтрів:

$$p\textit{в}_i^{\left(S_{r,0}\right)} = \sum_{j=i-1}^{i+1} \gamma\textit{в}_{1,j}^{\left(S_{r,0}\right)} p_j \ , \ r = 2,3 , \qquad p\textit{в}_i^{\left(S_{4,0}\right)} = \sum_{j=i-2}^{i+2} \gamma\textit{в}_{1,j}^{\left(S_{4,0}\right)} p_j \ ,$$

де $\gamma\textit{в}_1^{\left(S_{2,0}\right)} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma\textit{в}_1^{\left(S_{3,0}\right)} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma\textit{в}_1^{\left(S_{4,0}\right)} = \frac{1}{384}\begin{pmatrix} -1 \\ -76 \\ 154 \\ -76 \\ -1 \end{pmatrix}.$

У двовимірному випадку, враховуючи вираз

$$p\textit{в}_{i,j} = p_{i,j} - p\textit{н}_{i,j} , \ i, j \in Z ,$$

отримуємо:

$$p\textit{в}_{i,j}^{\left(S_{r,0}\right)} = \sum_{i_t=i-1}^{i+1} \sum_{j_q=j-1}^{j+1} \gamma\textit{в}_{2,i_t,j_q}^{\left(S_{r,0}\right)} p_{i_t,j_q} \ , \ r = 2,3 \qquad p\textit{в}_{i,j}^{\left(S_{4,0}\right)} = \sum_{i_t=i-2}^{i+2} \sum_{j_q=j-2}^{j+2} \gamma\textit{в}_{2,i_t,j_q}^{\left(S_{4,0}\right)} p_{i_t,j_q} \ ,$$

де $\gamma\textit{в}_2^{\left(S_{2,0}\right)} = \frac{1}{64}\begin{pmatrix} -1 & -6 & -1 \\ -6 & 28 & -6 \\ -1 & -6 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma\textit{в}_2^{\left(S_{3,0}\right)} = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} -1 & -4 & -1 \\ -4 & 20 & -4 \\ -1 & -4 & -1 \end{pmatrix},$

$$\gamma\textit{в}_2^{\left(S_{4,0}\right)} = \frac{1}{147456}\begin{pmatrix} -1 & -76 & -230 & -76 & -1 \\ -76 & -5776 & -17480 & -5776 & -76 \\ -230 & -17480 & 94556 & -17480 & -230 \\ -76 & -5776 & -17480 & -5776 & -76 \\ -1 & -76 & -230 & -76 & -1 \end{pmatrix}.$$

У подальшому викладені розглянемо можливість побудови «подвійних» фільтрів відповідних частотних складових. Розглянемо вираз (11). Припустимо, що послідовність відліків функції $p(t)$, утворена після застосування сплайн-оператора, підлягає повторній дії того ж оператора. Такий підхід дозволяє отримання низькочастотних фільтрів з більш широким вікном та більшим ступенем згладжування, стосовно вихідних даних:

$$S_{2,0}\left(S_{2,0}\left(p,ih\right),ih\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{8}p_{i-2} + \frac{3}{4}p_{i-1} + \frac{1}{8}p_i\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{8}p_{i-1} + \frac{3}{4}p_i + \frac{1}{8}p_{i+1}\right) +$$

$$+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{8}p_i + \frac{3}{4}p_{i+1} + \frac{1}{8}p_{i+2}\right) = \frac{1}{64}p_{i-2} + \frac{3}{16}p_{i-1} + \frac{19}{32}p_i + \frac{3}{16}p_{i+1} + \frac{1}{64}p_{i+2} =$$

$$= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left(p_{i-2}\ p_{i-1}\ p_i\right) \quad \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left(p_{i-1}\ p_i\ p_{i+1}\right) \quad \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left(p_i\ p_{i+1}\ p_{i+2}\right) \right) =$$

$$= \frac{1}{64}\begin{pmatrix} 1 & & \\ 6+ & 6 & \\ 1+ & 36+ & 1 \\ & 6 & +6 \\ & & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(p_{i-2} \quad p_{i-1} \quad p_i \quad p_{i+1} \quad p_{i+2}\right) = \sum_{j=i-2}^{i+2} \gamma\textit{н}_{1,j}^{\left(S_{2,0}\left(S_{2,0}\right)\right)} p_j \ , \qquad (13)$$

де $$\gamma н_1^{\left(S_{2,0}\left(S_{2,0}\right)\right)}=\frac{1}{64}\begin{pmatrix}1\\12\\38\\12\\1\end{pmatrix}.$$

Вводячи позначення $S_{r,0}\left(S_{r,0}\left(p,ih\right),ih\right)=pн_i^{\left(S_{r,0}\left(S_{r,0}\right)\right)}$, за аналогією з (13), для $r=3,4$ має місце:

$$pн_i^{\left(S_{3,0}\left(S_{3,0}\right)\right)}=\sum_{j=i-2}^{i+2}\gamma н_{1,j}^{\left(S_{3,0}\left(S_{3,0}\right)\right)}p_j\,,\quad pн_i^{\left(S_{4,0}\left(S_{4,0}\right)\right)}=\sum_{j=i-4}^{i+4}\gamma н_{1,j}^{\left(S_{4,0}\left(S_{4,0}\right)\right)}p_j\,.$$

де $$\gamma н_1^{\left(S_{3,0}\left(S_{3,0}\right)\right)}=\frac{1}{36}\begin{pmatrix}1\\8\\18\\8\\1\end{pmatrix},\qquad \gamma н_1^{\left(S_{4,0}\left(S_{4,0}\right)\right)}=\frac{1}{147456}\begin{pmatrix}1\\152\\6236\\35112\\64454\\35112\\6236\\152\\1\end{pmatrix}.$$

Відповідно, для високочастотних фільтрів буде справедливо (не наводиться для $pв_i^{\left(S_{4,0}\left(S_{4,0}\right)\right)}$ задля економії місця):

$$pв_i^{\left(S_{2,0}\left(S_{2,0}\right)\right)}\sum_{j=i-2}^{i+2}\gamma в_{1,j}^{\left(S_{2,0}\left(S_{2,0}\right)\right)}p_j\,,\qquad pв_i^{\left(S_{3,0}\left(S_{3,0}\right)\right)}=\sum_{j=i-2}^{i+2}\gamma в_{1,j}^{\left(S_{3,0}\left(S_{3,0}\right)\right)}p_j\,,$$

де $$\gamma в_1^{\left(S_{2,0}\left(S_{2,0}\right)\right)}=\frac{1}{64}\begin{pmatrix}-1\\-12\\26\\-12\\-1\end{pmatrix},\qquad \gamma в_1^{\left(S_{3,0}\left(S_{3,0}\right)\right)}=\frac{1}{36}\begin{pmatrix}-1\\-8\\18\\-8\\-1\end{pmatrix}.$$

Аналогічно, неважко отримати фільтри відповідних частот на розбитті Δ_{h_t,h_q} (задля економії місця $\gamma в_2^{\left(S_{r,0}\left(S_{r,0}\right)\right)}$, $r=2,3,4$ не наводиться):

$$pн_{i,j}^{\left(S_{r,0}\left(S_{r,0}\right)\right)}=\sum_{i_t=i-2}^{i+2}\sum_{j_q=j-2}^{j+2}\gamma н_{2,i_t,j_q}^{\left(S_{r,0}\left(S_{r,0}\right)\right)}p_{i_t,j_q}\,,\ pв_{i,j}^{\left(S_{r,0}\left(S_{r,0}\right)\right)}=\sum_{i_t=i-2}^{i+2}\sum_{j_q=j-2}^{j+2}\gamma в_{2,i_t,j_q}^{\left(S_{r,0}\left(S_{r,0}\right)\right)}p_{i_t,j_q}\,,\ r=2,3,$$

$$pн_{i,j}^{\left(S_{4,0}\left(S_{4,0}\right)\right)}=\sum_{i_t=i-4}^{i+4}\sum_{j_q=j-4}^{j+4}\gamma н_{2,i_t,j_q}^{\left(S_{4,0}\left(S_{4,0}\right)\right)}p_{i_t,j_q}\,,\qquad pв_{i,j}^{\left(S_{4,0}\left(S_{4,0}\right)\right)}=\sum_{i_t=i-4}^{i+4}\sum_{j_q=j-4}^{j+4}\gamma в_{2,i_t,j_q}^{\left(S_{4,0}\left(S_{4,0}\right)\right)}p_{i_t,j_q}\,,$$

де

$$\gamma н_2^{\left(S_{2,0}\left(S_{2,0}\right)\right)} = \frac{1}{1296}\begin{pmatrix} 1 & 8 & 18 & 8 & 1 \\ 8 & 64 & 144 & 64 & 8 \\ 18 & 144 & 324 & 144 & 18 \\ 8 & 64 & 144 & 64 & 8 \\ 1 & 8 & 18 & 8 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\gamma в_2^{\left(S_{2,0}\left(S_{2,0}\right)\right)} = \frac{1}{4096}\begin{pmatrix} -1 & -12 & -38 & -12 & -1 \\ -12 & -144 & -456 & -144 & -12 \\ -38 & -456 & 2652 & -456 & -38 \\ -12 & -144 & -456 & -144 & -12 \\ -1 & -12 & -38 & -12 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\gamma н_2^{\left(S_{3,0}\left(S_{3,0}\right)\right)} = \frac{1}{4096}\begin{pmatrix} 1 & 12 & 38 & 12 & 1 \\ 12 & 144 & 456 & 144 & 12 \\ 38 & 456 & 1444 & 456 & 38 \\ 12 & 144 & 456 & 144 & 12 \\ 1 & 12 & 38 & 12 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\gamma в_2^{\left(S_{3,0}\left(S_{3,0}\right)\right)} = \frac{1}{1296}\begin{pmatrix} -1 & -8 & -18 & -8 & -1 \\ -8 & -64 & -144 & -64 & -8 \\ -18 & -144 & 972 & -144 & -18 \\ -8 & -64 & -144 & -64 & -8 \\ -1 & -8 & -18 & -8 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\gamma н_2^{\left(S_{4,0}\left(S_{4,0}\right)\right)} = \begin{pmatrix} 4,6\cdot 10^{-11} & 0,000000007 & 0,000000287 & 0,000001615 & 0,000002964 & \cdots \\ 0,000000007 & 0,000001063 & 0,000043594 & 0,000245456 & 0,000450577 & \cdots \\ 0,000000287 & 0,000043594 & 0,001788493 & 0,01007017 & 0,018485495 & \cdots \\ 0,000001615 & 0,000245456 & 0,01007017 & 0,056700415 & 0,104083178 & \cdots \\ 0,000002964 & 0,000450577 & 0,018485495 & 0,104083178 & 0,191062234 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix};$$

$$\gamma в_2^{\left(S_{4,0}\left(S_{4,0}\right)\right)} = \begin{pmatrix} -4,6\cdot 10^{-11} & -0,000000007 & -0,000000287 & -0,000001615 & -0,000002964 & \cdots \\ -0,000000007 & -0,000001063 & -0,000043594 & -0,000245456 & -0,000450577 & \cdots \\ -0,000000287 & -0,000043594 & -0,001788493 & -0,01007017 & -0,018485495 & \cdots \\ -0,000001615 & -0,000245456 & -0,01007017 & -0,056700415 & -0,104083178 & \cdots \\ -0,000002964 & -0,000450577 & -0,018485495 & -0,104083178 & 0,808937766 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

де, для $\gamma н_2^{\left(S_{4,0}\left(S_{4,0}\right)\right)}$, $\gamma в_2^{\left(S_{4,0}\left(S_{4,0}\right)\right)}$ приводяться коефіцієнти з індексами

$$\begin{pmatrix} (i-4, j-4) & (i-4, j-3) & (i-4, j-2) & (i-4, j-1) & (i-4, j) & \cdots \\ (i-3, j-4) & (i-3, j-3) & (i-3, j-2) & (i-3, j-1) & (i-3, j) & \cdots \\ (i-2, j-4) & (i-2, j-3) & (i-2, j-2) & (i-2, j-1) & (i-2, j) & \cdots \\ (i-1, j-4) & (i-1, j-3) & (i-1, j-2) & (i-1, j-1) & (i-1, j) & \cdots \\ (i, j-4) & (i, j-3) & (i, j-2) & (i, j-1) & (i, j) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix};$$

а інші визначаються з урахування симетрії матриць $\gamma н_2^{\left(S_{4,0}\left(S_{4,0}\right)\right)}$, $\gamma в_2^{\left(S_{4,0}\left(S_{4,0}\right)\right)}$.

Слід відмітити, що для отримання на Δ_h, наприклад, «потрійних» низькочастотних фільтрів, вже як $S_{r,0}\left(S_{r,0}\left(S_{r,0}\left(p,ih\right),ih\right),ih\right)$, $r=2,3,4$, достатньо використання рівності, аналогічній (13). Крім того, неважко переконатись, що між $\gamma\mathcal{H}_1^{\left(S_{r,0}\left(S_{r,0}\right)\right)}$ та $\gamma\mathcal{H}_2^{\left(S_{r,0}\right)}$, існує залежність:

$$\gamma\mathcal{H}_{1,i\mp(n-j)}^{\left(S_{r,0}\left(S_{r,0}\right)\right)}=\sum_{k=1}^{n}\gamma\mathcal{H}_{2,k,k+(n-j)}^{\left(S_{r,0}\right)},\ j=\overline{1,n},\ n=rg\left(\gamma\mathcal{H}_2^{\left(S_{r,0}\right)}\right),$$

отже, не вдаючись до очевидних викладок, маємо:

$$\gamma\mathcal{H}_{1,i\mp(n-j)}^{\left(S_{r,0}\left(S_{r,0}\left(S_{r,0}\right)\right)\right)}=\sum_{k=1}^{n}\gamma\mathcal{H}_{2,k,k+(n-j)}^{\left(S_{r,0}\left(S_{r,0}\right)\right)},\quad j=\overline{1,n},\ n=rg\left(\gamma\mathcal{H}_2^{\left(S_{r,0}\left(S_{r,0}\right)\right)}\right).$$

Висновки. В роботі одержано низько- та високочастотні фільтри одно- та двовимірних дискретних даних на підставі алгоритмізації обчислювальних схем сплайнів відповідної розмірності на основі *B*-слайнів, близьких до інтерполяційних у середньому. Обґрунтуванням введення до застосування зазначених фільтрів є згладжуючі та апроксимативні властивості розглянутих в роботі сплайн-операторів. Обчислювальні схеми, що можуть бути побудовані на підставі запропонованих лінійних функціоналів, задовольнятимуть вимозі функціонування програмного забезпечення в режимі реального часу.

Отримані результати можуть біти використані при вирішенні задач субполосної двосмугової фільтрації та кратномаштабного аналізу, при цифровій обробці сигналів та зображень. Подальші дослідження можна зосередити на розробці відповідних інформаційних та обчислювальних технологій, з урахуванням одержаних функціоналів.

Бібліографічні посилання

1. **Добеши И.** Десять лекцій по вейвлетам. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001, – 464с.
2. **Чуи Ч.** Введение в веївлеті: Пер. с англ. – М.: Мир, 2001. – 412с., ил.
3. **Лигун А.А., Шумейко А.А.** Асимптотические методы восстановления кривых. –К.: ІМ НАН України, 1996. - 358 с.
4. **Приставка П.О.** Поліномаільні сплайни при обробці даних. Д.: Вид-во Дніпропетр. ун-ту, 2004. – 236 с
5. **Лигун А.А., Кармазина В.В.** О восстановлении эмпирической функции плотности распределения с помощью гистосплайнов второго порядка/ Днепродзержинский индустр. ин-т. – Днепродзержинск: 1989.-30 с.-Деп. в УкрНИИНТИ 8.06.89, N1559- Ук89.
6. **Лигун А.А., Кармазина В.В.** Восстановление функций плотности распределения и их производных с помощью кубических гистосплайнов/ Днепродзержинский индустр. ин-т. – Днепродзержинск: 1989. –38 с. –Деп. в УкрНИИНТИ 13.11.89, N2569– Ук89.
7. **Лигун А.А., Шумейко А.А.** Об одном методе сглаживания поверхностей. - Математичне моделювання, Діпродзержинськ, ДГТУ, 1 (4), 2000, с.5-8.
8. **Лигун А.А., Шумейко А.А., Голобородько П.Л.** О гарантированных оценках для линейных методов восстановления, основанных на бинарном расслоении // Математичне моделювання – №2 (7), 2001 –С.30–39.