УДК 519.652:519.254 (045)

Приставка П.О.,
Колганова О.О.

АВТОМАТИЗАЦІЯ СТИСНЕННЯ ГРАФІЧНИХ ДАНИХ НА ОСНОВІ ЧАСТКОВИХ ВИПАДКІВ ЛОКАЛЬНИХ ПОЛІНОМІАЛЬНИХ СПЛАЙНІВ, БЛИЗЬКИХ ДО ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ У СЕРЕДНЬОМУ ДРУГОГО ТА ТРЕТЬОГО ПОРЯДКІВ

Для програмних стандартів цифрового стиснення зображень (JPEG, JPEG2000) розроблено процедуру обробки послідовностей та отримано лінійні оператори, які є частковими випадками локальних поліноміальних сплайнів другого порядку першого та другого ступеня уточнення та третього порядку першого ступеня уточнення, що є близькими до інтерполяційних у середньому

Постановка проблеми

На сьогодні задачі автоматизації процесу стиснення цифрових сигналів, зображень та відео характеризуються, в першу чергу, великим обсягом даних, що за вимогою мають оброблятись в режимі реального часу. Найвищу швидкодію серед методів, що забезпечують операції фільтрації, масштабуваня, стиснення та які реалізуються при автоматизації розрахунків, показують ті, в основу яких покладено використання лінійних операторів, як таких, що мають найменшу обчислювальну складність. По суті застосування таких операторів являє собою дискретну згортку цифрової послідовності з симетричною або несиметричною маскою, коефіцієнти якої часто отримані, як частковий випадок деякого неперервного наближення. Наприклад, часткові випадки гаусіана та лапласіана використовують в задачі субполосної фільтрації, відповідно, як низько- та високочастотні фільтри [1].

Зростання обсягів інформації при обробці цифрових сигналів характеризується не просто формальним збільшенням кількості даних, а ще й зміною їх властивостей. Зокрема, при обробці цифрових фотографій спостерігається тенденція до збільшення розрішення систем фіксації, що може вимагати збільшення ширини масок операторів згортки. Тож актуальним є дослідження методів апроксимації, що мають високі апроксимативні властивості та низьку обчислювальну складність водночас, задля отримання на їх основі нових лінійних операторів для цифрової обробки сигналів.

Аналіз досліджень та постановка задачі

У системах автоматизованої обробки цифрових графічних даних однією із поширених задач при стисненні одновимірних цифрових послідовностей є кратне або некратне їх масштабування. Дана операція поширена при стисненні сигналів, виділення інформативних складових або при дослідженні локальних особливостей. Варто окремо звернути увагу на дві близькі, але все ж таки різні за суттю області обробки, що базуються з одного боку на методах кратномасштабного аналізу (КМА) [2], а з другого – subdivision-методи [3]. При багатьох точках дотику цих двох обчислювальних технологій можливим є відзначити, що в більшості випадків процедури КМА базуються на операторах, що згладжують, а процедури subdivision – на операторах, що близькі до інтерполяційних.

Якщо говорити про наближення, близькі до інтерполяційних, то з точки зору якості неперервних апроксимацій функцій, заданих послідовностями відліків у вузлових точках, з урахуванням вимоги низької обчислювальної складності відповідних процедур, позиції лідера займають методи, засновані на використанні лінійних комбінацій В-сплайнів [4 - 8]. В роботі [9] обґрунтовано лінійні комбінації В-сплайнів, близькі до інтерполяційних у середньому в якості моделі цифрових сигналів з кінцевою енергією, показано можливість їх реалізації у програмному забезпеченні обробки цифрових сигналі, в тому числі для систем, що функціонують у режимі реального часу.

Вперше такі сплайни на основі В-сплайнів другого порядку були введені в роботах А.О.Лигуна та В.В.Кармазиної [10]. Обчислювальний аспект їх застосування в задачі бінарного subdivision подано в роботах [8; 11]. Частковий випадок прикладу застосування уточнюючого локального сплайну на основі В-сплайнів другого порядку в задачі не бінарного subdivision наведено в роботі [12].

Поставимо за мету даної роботи отримати часткові випадки локальних поліноміальних сплайнів, близьких до інтерполяційних у середньому на основі В-сплайнів другого та третього порядків, що можуть мати застосування при розробці автоматизованих систем обробки цифрових сигналів та послідовностей.

Виклад основного матеріалу

Нехай з кроком $h>0$ задано розбиття дійсної вісі $\Delta_h : t_i = ih$, $i \in Z$, у кожній точці якого отримано значення деякої неперервної функції $p(t)$, визначеної на $R_1(-\infty;\infty)$. Будемо вважати, що інформація про функцію $p(t)$, яка підлягає відтворенню, задано у вузлах розбиття Δ_h у вигляді інтеграла

$$\bar{p}_i = \frac{1}{h}\int\limits_{(i-0,5)h}^{(i+0,5)h} p(t)\,dt,$$

при цьому, істинне значення функції $p(t)$ у вузлах будемо визначати

$$p_i = \bar{p}_i + \varepsilon_i,\ i \in Z,$$

де ε_i – похибка.

Згідно роботи [7] уточнюючі сплайни на основі В-сплайнів, близькі до інтерполяційних у середньому, що найчастіше мають використання в практичній діяльності, такі:

$$S_{2,1}(p,t) = \sum_{i\in Z}\left(p_i - \frac{1}{6}\Delta^2 p_i\right)B_{2,h}\left(t-(i+0,5)h\right),$$

$$S_{2,2}(p,t) = \sum_{i\in Z}\left(p_i - \frac{1}{6}\Delta^2 p_i + \frac{1}{36}\Delta^4 p_i\right)B_{2,h}\left(t-(i+0,5)h\right),$$

$$S_{3,1}(p,t) = \sum_{i\in Z}\left(p_i - \frac{5}{24}\Delta^2 p_i\right)B_{3,h}\left(t-ih\right),$$

де $\Delta^{2u} p_i = \Delta^{2u-2} p_{i+1} - 2\Delta^{2u-2} p_i + \Delta^{2u-2} p_{i-1}$, $u = 1,2,\ldots$,

$B_{r,h}(t)$, $r = 2,3,4$ - В-сплайн, що з точністю до аргументу визначається так:

$$B_{2,h}(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [-3h/2;3h/2], \\ (3+2t/h)^2/8, & t \in [-3h/2;-h/2], \\ 3/4-(2t/h)^2/4, & t \in [-h/2;h/2], \\ (3-2t/h)^2/8, & t \in [h/2;3h/2]; \end{cases}$$

$$B_{3,h}(t)=\frac{1}{48}\begin{cases}0, & t\notin[-2h;2h],\\ (4+2t/h)^3, & t\in[-2h;-h],\\ -3(2t/h)^3-12(2t/h)^2+32, & t\in[-h;0],\\ 3(2t/h)^3-12(2t/h)^2+32, & t\in[0;h],\\ (4-2t/h)^3, & t\in[h_t;2h].\end{cases}$$

Наведені сплайни мають високі апроксимативні властивості. Зокрема щодо норм сплайн-операторів справедливі наступні твердження

$\left\|S_{2,1}(p,t)\right\|=\frac{4}{3}\left\|p(t)\right\|$,

$\left\|S_{2,2}(p,t)\right\|=\frac{3}{2}\left\|p(t)\right\|$,

$\left\|S_{3,1}(p,t)\right\|=\frac{41}{32}\left\|p(t)\right\|$,

де $\left\|S_{r,u}(p,t)\right\|=\sup\limits_{|\varepsilon_i|}\max\limits_{t}\left|S_{r,u}(\varepsilon,t)\right|$

Зауважимо, що значення норми оператора $S_{r,u}(p,t)$ – це величина, яка характеризує в скільки разів може зрости похибка при відтворенні функції за допомогою сплайну, якщо значення p_i задані з похибкою.

Про похибку відтворення функції $p(t)$ за використанням сплайнів $S_{r,u}(\overline{p},t)$, $r=2,3$, $u=1,2$ свідчать наступні оцінки [7].

При $h\to 0$ для довільної функції $p(t)\in C^3$ буде вірно наступне $|\varepsilon_i|<\varepsilon$, $i\in Z$.

$$\left\|p(t)-S_{2,u}(\overline{p},t)\right\|=\frac{h^3}{12\sqrt{3}}\left\|p^{(3)}(t)\right\|+\mathrm{o}\left(h^3\right),\quad u=1,2,$$

і для довільної функції $p(t)\in C^4$ справедливо

$$\left\|p(t)-S_{3,1}(\overline{p},t)\right\|=\frac{1221h^4}{2880}\left\|p^{(4)}(t)\right\|+\mathrm{o}\left(h^4\right),$$

Подання зазначених сплайнів у вигляді лінійної комбінації В-сплайнів не зовсім зручне для реалізації в обчислювальному середовищі, тож якщо ввести заміну $x=\frac{2}{h}\left(t-(i+0,5)h\right)$, $|x|\le 1$, при $r=2$

Та $x=\frac{2}{h}(t-ih)$, $|x|\le 1$, при $r=3$, то сплайни $S_{r,u}(p,t)$, $r=2,3$, $u=1,2$ можна навести в розгорнутому представленні:

$$S_{2,1}(p,t)=\frac{1}{48}\Big(-(1-x)^2p_{i-2}+\left(2-16x+10x^2\right)p_{i-1}+\left(46-18x^2\right)p_i+$$
$$+\left(2+16x+10x^2\right)p_{i+1}-(1+x)^2p_{i+2}\Big),\qquad (1)$$

$$S_{2,2}(p,t)=\frac{1}{288}\Big((1-x)^2p_{i-3}+\left(-4+20x-12x^2\right)p_{i-2}+$$

$$+\left(-5-106x+75x^2\right)p_{i-1}+\left(304-128x^2\right)p_i+\left(-5+106x+75x^2\right)p_{i+1}+$$
$$+\left(-4-20x-12x^2\right)p_{i+2}+\left(1+x\right)^2 p_{i+3}\Big), \qquad (2)$$

$$S_{3,1}(p,t)=\frac{1}{1152}\Big(-5(1-x)^3 p_{i-2}+\left(-81-27x+117x^2-49x^3\right)p_{i-1}+$$
$$+\left(662-570x-102x^2+122x^3\right)p_i+\left(662+570x-102x^2-122x^3\right)p_{i+1}+$$
$$+\left(-81+27x+117x^2+49x^3\right)p_{i+2}-5(1+x)^3 p_{i+3}\Big). \qquad (3)$$

На основі виразів (1)-(3) нескладно забезпечити зміну кількості відліків в послідовності $\{p_i\}_{i\in Z}$ в довільну кількість раз (необов’язково у цілочисельну). Але, якщо зміна масштабу послідовності здійснюється на певний наперед відомий коефіцієнт, то в цьому разі для апроксимацій, що мають явний вигляд як наведені вище, можна отримати обчислювальні процедури з меншою обчислювальною складністю, як часткові випадки (subdivision-процедури).

Введемо позначення $\gamma_{(x)}^{(r,k)}$ - вектор стовпець координати якого після операції дискретної згортки з послідовністю відліків $\{p_i\}_{i\in Z}$, функції $p(t)$ надають лінійний функціонал $S_{r,k}^{(x)}$, що є частковим випадком сплайнів (1)-(4) в точці x, тобто:

$$S_{r,k}^{(x)}=\sum_{i\in\mathbf{Z}}\gamma_{(x)}^{(r,k)}{}_i\cdot p_i.$$

Нехай для визначеності x може набувати значення із множини

$$\left\{-1,-\frac{4}{5},-\frac{3}{4},-\frac{2}{3},-\frac{3}{5},-\frac{1}{2},-\frac{2}{5},-\frac{1}{3},-\frac{1}{4},-\frac{1}{5},0,\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},1\right\}. \qquad (4)$$

Тоді для сплайну $S_{2,1}(p,t)$ має місце : $S_{2,1}^{(x)}=\sum_{j=i-2}^{i+2}\gamma_{(x)}^{(2,1)}{}_{j-i}\cdot p_j$,

де $\gamma_{(-1)}^{(2,1)}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}-1 & 7 & 7 & -1 & 0\end{pmatrix}^T$; $\gamma_{\left(-\frac{4}{5}\right)}^{(2,1)}=\frac{1}{1200}\begin{pmatrix}-81 & 530 & 862 & -110 & -1\end{pmatrix}^T$;

$\gamma_{\left(-\frac{3}{4}\right)}^{(2,1)}=\frac{1}{768}\begin{pmatrix}-49 & 314 & 574 & -70 & -1\end{pmatrix}^T$; $\gamma_{\left(-\frac{2}{3}\right)}^{(2,1)}=\frac{1}{432}\begin{pmatrix}-25 & 154 & 342 & -38 & -1\end{pmatrix}^T$;

$\gamma_{\left(-\frac{3}{5}\right)}^{(2,1)}=\frac{1}{300}\begin{pmatrix}-16 & 95 & 247 & -25 & -1\end{pmatrix}^T$; $\gamma_{\left(-\frac{1}{2}\right)}^{(2,1)}=\frac{1}{192}\begin{pmatrix}-9 & 50 & 166 & -14 & -1\end{pmatrix}^T$;

$\gamma_{\left(-\frac{2}{5}\right)}^{(2,1)}=\frac{1}{1200}\begin{pmatrix}-49 & 250 & 1078 & -70 & -9\end{pmatrix}^T$; $\gamma_{\left(-\frac{1}{3}\right)}^{(2,1)}=\frac{1}{108}\begin{pmatrix}-4 & 19 & 99 & -5 & -1\end{pmatrix}^T$;

$$\gamma_{\left(-\frac{1}{4}\right)}^{(2,1)}=\frac{1}{768}\begin{pmatrix}-25 & 106 & 718 & -22 & -9\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma_{\left(-\frac{1}{5}\right)}^{(2,1)}=\frac{1}{300}\begin{pmatrix}-9 & 35 & 283 & -5 & -4\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma_{(0)}^{(2,1)} = \frac{1}{48}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 46 & 2 & -1\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma_{\left(\frac{1}{5}\right)}^{(2,1)} = \frac{1}{300}\begin{pmatrix}-4 & -5 & 283 & 35 & -9\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma_{\left(\frac{1}{4}\right)}^{(2,1)} = \frac{1}{768}\begin{pmatrix}-9 & -22 & 718 & 106 & -25\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma_{\left(\frac{1}{3}\right)}^{(2,1)} = \frac{1}{108}\begin{pmatrix}-1 & -5 & 99 & 19 & -4\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma_{\left(\frac{2}{5}\right)}^{(2,1)} = \frac{1}{1200}\begin{pmatrix}-9 & -70 & 1078 & 250 & -49\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma_{\left(\frac{1}{2}\right)}^{(2,1)} = \frac{1}{192}\begin{pmatrix}-1 & -14 & 166 & 50 & -9\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma_{\left(\frac{3}{5}\right)}^{(2,1)} = \frac{1}{300}\begin{pmatrix}-1 & 25 & 247 & 95 & -16\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma_{\left(\frac{2}{3}\right)}^{(2,1)} = \frac{1}{432}\begin{pmatrix}-1 & -38 & 342 & 154 & -25\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma_{\left(\frac{3}{4}\right)}^{(2,1)} = \frac{1}{768}\begin{pmatrix}-1 & -70 & 574 & 314 & -49\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma_{\left(\frac{4}{5}\right)}^{(2,1)} = \frac{1}{1200}\begin{pmatrix}-1 & -110 & 862 & 530 & -81\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma_{(1)}^{(2,1)} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix}0 & -1 & 7 & 7 & -1\end{pmatrix}^T.$$

Для сплайну $S_{2,2}(p,t)$ виконується:

$$S_{2,2}^{(x)} = \sum_{j=i-3}^{i+3} \gamma_{(x)}^{(2,2)}{}_{j-i} \cdot p_j, \text{ де } \gamma_{(-1)}^{(2,2)} = \frac{1}{72}\begin{pmatrix}1 & -9 & 44 & 44 & -9 & 1 & 0\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma_{\left(-\frac{4}{5}\right)}^{(2,2)} = \frac{1}{7200}\begin{pmatrix}81 & -692 & 3195 & 5552 & -1045 & 108 & 1\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma_{\left(-\frac{3}{4}\right)}^{(2,2)} = \frac{1}{4608}\begin{pmatrix}49 & -412 & 1867 & 3712 & -677 & 68 & 1\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma_{\left(-\frac{2}{3}\right)}^{(2,2)} = \frac{1}{2592}\begin{pmatrix}25 & -204 & 891 & 2224 & -381 & 36 & 1\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma_{\left(-\frac{3}{5}\right)}^{(2,2)} = \frac{1}{1800}\begin{pmatrix}16 & -127 & 535 & 1612 & -260 & 23 & 1\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma_{\left(-\frac{1}{2}\right)}^{(2,2)} = \frac{1}{1152}\begin{pmatrix}9 & -68 & 267 & 1088 & -157 & 12 & 1\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma_{\left(-\frac{2}{5}\right)}^{(2,2)} = \frac{1}{7200}\begin{pmatrix}49 & -348 & 1235 & 7088 & -885 & 52 & 9\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma_{\left(-\frac{1}{3}\right)}^{(2,2)} = \frac{1}{648}\begin{pmatrix}4 & -27 & 87 & 652 & -72 & 3 & 1\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma_{\left(-\frac{1}{4}\right)}^{(2,2)} = \frac{1}{4608}\begin{pmatrix}25 & -156 & 419 & 4736 & -429 & 4 & 9\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma_{\left(-\frac{1}{5}\right)}^{(2,2)} = \frac{1}{1800}\begin{pmatrix}9 & -53 & 120 & 1868 & -145 & -3 & 4\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma_{(0)}^{(2,2)} = \frac{1}{288}\begin{pmatrix}1 & -4 & -5 & 304 & -5 & -4 & 1\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma_{\left(\frac{1}{5}\right)}^{(2,2)} = \frac{1}{1800}\begin{pmatrix}4 & -3 & -145 & 1868 & 120 & -53 & 9\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma_{\left(\frac{1}{4}\right)}^{(2,2)} = \frac{1}{4608}\begin{pmatrix}9 & 4 & -429 & 4736 & 419 & -156 & 25\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma_{\left(\frac{1}{3}\right)}^{(2,2)} = \frac{1}{648}\begin{pmatrix}1 & 3 & -72 & 652 & 87 & -27 & 4\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma_{\left(-\frac{2}{5}\right)}^{(2,2)} = \frac{1}{7200}\begin{pmatrix}9 & 52 & -885 & 7088 & 1235 & -348 & 49\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma_{\left(\frac{1}{2}\right)}^{(2,2)} = \frac{1}{1152}\begin{pmatrix}1 & 12 & -157 & 1088 & 267 & -68 & 9\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma_{\left(\frac{3}{5}\right)}^{(2,2)} = \frac{1}{1800}\begin{pmatrix}1 & 23 & -260 & 1612 & 535 & -127 & 16\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma_{\left(\frac{2}{3}\right)}^{(2,2)} = \frac{1}{2592}\begin{pmatrix}1 & 36 & -381 & 2224 & 891 & -204 & 25\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma_{\left(\frac{3}{4}\right)}^{(2,2)} = \frac{1}{4608}\begin{pmatrix}1 & 68 & -677 & 3712 & 1867 & -412 & 49\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma_{\left(\frac{4}{5}\right)}^{(2,2)} = \frac{1}{7200}\begin{pmatrix}1 & 108 & -1045 & 5552 & 3195 & -692 & 81\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma_{(1)}^{(2,2)} = \frac{1}{72}\begin{pmatrix}0 & 1 & -9 & 44 & 44 & 9 & 1\end{pmatrix}^T.$$

Для сплайну $S_{3,1}(p,t)$ буде: $S_{3,1}^{(x)} = \sum\limits_{j=i-2}^{i+3} \gamma_{(x)\,j-i}^{(3,1)} \cdot p_j$,

де $\gamma_{(-1)}^{(3,1)} = \frac{1}{144}\begin{pmatrix}-5 & 14 & 126 & 14 & -5 & 0\end{pmatrix}^T$;

$$\gamma_{\left(-\frac{4}{5}\right)}^{(3,1)} = \frac{1}{144000}\begin{pmatrix}-3645 & 5071 & 123782 & 25398 & -6601 & -5\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma^{(3,1)}_{\left(-\frac{3}{4}\right)} = \frac{1}{73728}\begin{pmatrix}-1715 & 1647 & 62762 & 14630 & -3591 & -5\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma^{(3,1)}_{\left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{1}{31104}\begin{pmatrix}-625 & 95 & 25934 & 7366 & -1661 & -5\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma^{(3,1)}_{\left(-\frac{3}{5}\right)} = \frac{1}{18000}\begin{pmatrix}-320 & -189 & 14702 & 4838 & -1026 & -5\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma^{(3,1)}_{\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{9216}\begin{pmatrix}-135 & -257 & 7250 & 2934 & -571 & -5\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma^{(3,1)}_{\left(-\frac{2}{5}\right)} = \frac{1}{144000}\begin{pmatrix}-1715 & -6043 & 108234 & 53186 & -9527 & -135\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma^{(3,1)}_{\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{3888}\begin{pmatrix}-40 & -193 & 2822 & 1570 & -266 & -5\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma^{(3,1)}_{\left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{73728}\begin{pmatrix}-625 & -4235 & 50958 & 32962 & -5197 & -135\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma^{(3,1)}_{\left(-\frac{1}{5}\right)} = \frac{1}{18000}\begin{pmatrix}-135 & -1102 & 12046 & 8514 & -1283 & -40\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma^{(3,1)}_{(0)} = \frac{1}{1152}\begin{pmatrix}-5 & -81 & 662 & 662 & -81 & -5\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma^{(3,1)}_{\left(\frac{1}{5}\right)} = \frac{1}{18000}\begin{pmatrix}-40 & -1283 & 8514 & 12046 & -1102 & -135\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma^{(3,1)}_{\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{73728}\begin{pmatrix}-135 & -5197 & 32962 & 50958 & -4235 & -625\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma^{(3,1)}_{\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{3888}\begin{pmatrix}-5 & -266 & 1570 & 2822 & -193 & -40\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma^{(3,1)}_{\left(\frac{2}{5}\right)} = \frac{1}{144000}\begin{pmatrix}-135 & -9527 & 53186 & 108234 & -6043 & -1715\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma^{(3,1)}_{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{9216}\begin{pmatrix}-5 & -571 & 2934 & 7250 & -257 & -135\end{pmatrix}^T;$$

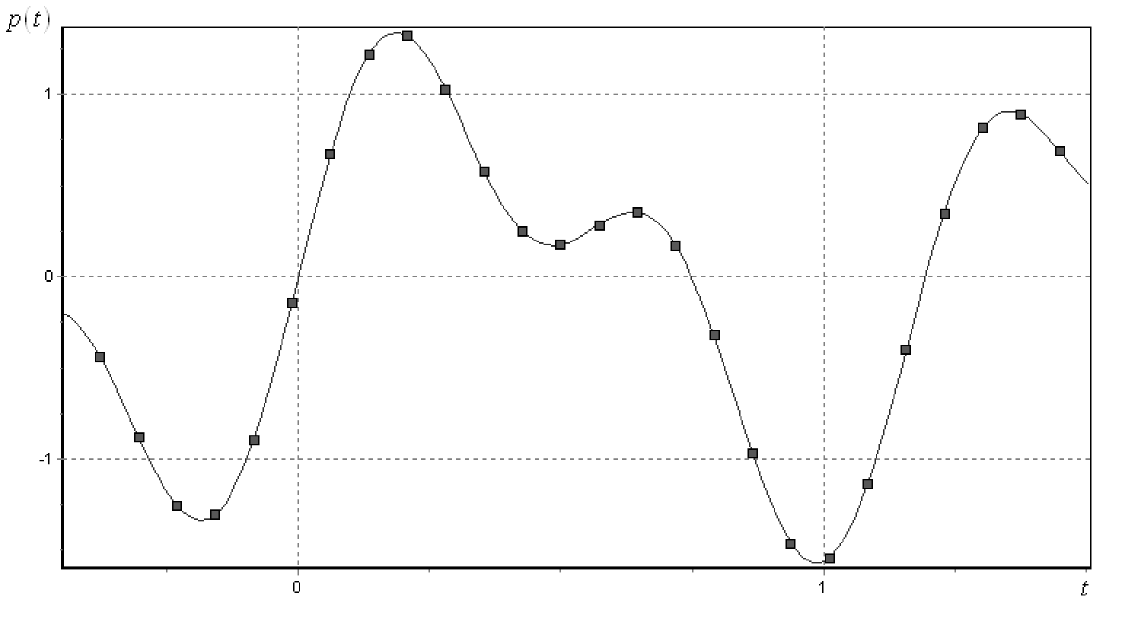
$$\gamma^{(3,1)}_{\left(\frac{3}{5}\right)} = \frac{1}{18000}\begin{pmatrix}-5 & -1026 & 4838 & 14702 & -189 & -320\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma^{(3,1)}_{\left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{1}{31104}\begin{pmatrix}-5 & -1661 & 7366 & 25934 & 95 & -625\end{pmatrix}^T;$$

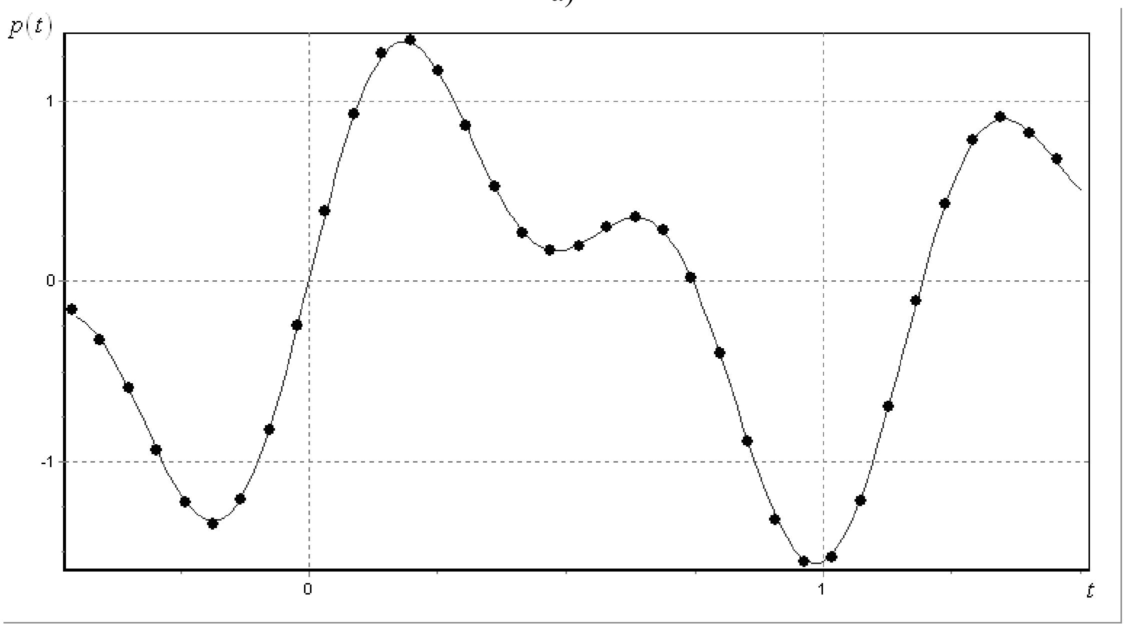
$$\gamma^{(3,1)}_{\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{1}{73728}\begin{pmatrix}-5 & -3591 & 14630 & 62762 & 1647 & -1715\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma^{(3,1)}_{\left(\frac{4}{5}\right)} = \frac{1}{144000}\begin{pmatrix}-5 & -6601 & 25398 & 123782 & 5071 & -3645\end{pmatrix}^T;$$

$$\gamma^{(3,1)}_{(1)} = \frac{1}{144}\begin{pmatrix}0 & -5 & 14 & 126 & 14 & -5\end{pmatrix}^T.$$



а)



б)

Рис.1. Небінарний subdivision «3 в 4» на основі сплайну (1):
а) функція $p(t) = \sin(5t) + 0,6\sin(11t)$, $t \in [-0,45;1,52]$ та її початкові відліки;
б)результат subdivision після однієї ітераціїю.

На графіках (рис.1) подано приклад небінарного subdivision при проектуванні кожних двох послідовних відліків функції $p(t) = \sin(5t) + 0,6\sin(11t)$, $t \in [-0,45;1,52]$ (суцільна крива) в три відліки. В якості лінійних операторів масштабування брались часткові випадки сплайну (1) відповідно в точках $x=-\frac{1}{4}$, $x=-\frac{3}{4}$, $x=\frac{3}{4}$, $x=\frac{3}{4}$ з множини (5), котрим, відповідають маски $\gamma^{(2,1)}_{\left(-\frac{1}{4}\right)}$, $\gamma^{(2,1)}_{\left(-\frac{3}{4}\right)}$, $\gamma^{(2,1)}_{\left(\frac{3}{4}\right)}$, $\gamma^{(2,1)}_{\left(\frac{1}{4}\right)}$. Як видно з графіків, при низькій обчислювальній складності, що надають часткові випадки сплайну (1), одержано наближення прийнятно високої якості апроксимації.

Висновки

В роботі отримано понад п'ятдесят часткових випадків локальних поліноміальних сплайнів другого порядку першого та другого ступеня уточнення та третього порядку першого ступеня уточнення, що є близькими до інтерполяційних у середньому.

Нові лінійні оператори можуть мати використання для систем автоматизованої обробки даних при розробці програмного забезпечення опрацювання числових послідовностей, цифрових сигналів та зображень, що функціонує у режимі реального часу. Наприклад, можуть використовуватись у таких цифрових стандартах стиснення графічних даних, як JPEG, JPEG2000. Швидкодія розрахунків забезпечується низькою обчислювальною складністю запропонованих лінійних операторів.

Подальші дослідження можуть полягати в отриманні нових операторів обробки дво- та тривимірних послідовностей на основі наведених в роботі функціоналів.

Список літератури

1. Роджерс Д., Адамс Дж. Математические основы машинной графики: Пер. с англ. –М.: Мир, 2001. –604 с.
2. Holschneider M. Wavelets. An analysis Tool. Oxford. Oxford University Press, 1995.
3. Andersson L.-E., Stewart N. Introduction to the mathematics of subdivision surfaces. – Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2010. – 356 p.
4. Де Бор К. Практическое руководство по сплайнам.- М.: Радио и связь, 1985.- 303 с.
5. Чуи Ч. Введение в вэйвлеты: Пер. с агнгл. –М.: Мир, 2001. –412 с.
6. M. Unser, "Splines: A Perfect Fit for Signal and Image Processing," IEEE Signal Processing Magazine, vol. 16, no. 6, pp. 22-38, 1999.
7. Лигун А.А., Шумейко А.А. Асимптотические методы восстановления кривых. –К.: ІМ НАН України, 1996. – 358 с.
8. Приставка П.О. Поліномаільні сплайни при обробці даних – Д.: Вид-во Дніпропетр. ун-ту, 2004. – 236 с.
9. Приставка П.О. Лінійні комбінації B-сплайнів, близькі до інтерполяційних у середньому, в задачі моделювання аналогових сигналів / Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій : Зб. наук. праць. - Д.: Вид-во Дніпропетр. ун-ту.- 2011. -Т.15. –С.4-17.
10. Лигун А.А., Кармазина В.В. О восстановлении эмпирической функции плотности распределения с помощью гистосплайнов второго порядка/ Днепродзержинский индустр. ин-т. – Днепродзержинск: 1989.-30 с.-Деп. в УкрНИИНТИ 8.06.89, N1559- Ук89.
11. Приставка П.О. Поліноміальні сплайни в задачах бінарного поповнення / Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій.- Д.: Вид-во Дніпропетр. ун-ту.- 2003.-Т.7. –С.39-53.
12. Приставка П.О. Небінарне поповнення послідовностей відліків гладких функцій лінійними операторами на основі поліноміальних сплайнів / Вісн. НАУ.- К.: НАУ.- 2008.-№3. -С. 85-89.