МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Кіровоградський державний педагогічний університет
імені Володимира Винниченка

Кафедра математики

УДК 519.1

Узгоджено **Затверджено**

ДИПЛОМНА РОБОТА

з методики викладання математики
студента групи 53
фізико-математичного факультету
Ягодзінського Сергія Миколайовича
на тему:

Методи знаходження скінченних сум

Науковий керівник:
доктор фізико–математичних наук, професор
Волков Юрій Іванович

Кіровоград 2001

Реферат

стр. 80, рис. 5, табл. 4, бібл. 26.

Суми, методи підсумовування, диференціальне числення, многочлен, квазімногочлен, прогресія, рекурентні рівняння, скінченні різниці, перетворення Абеля, числа Стірлінга, числа Бернулі, ймовірність, випадкова величина, математичне сподівання, дисперсія, гармонійні числа, наближені обчислення, апроксимація.

Розглянуто методи підсумовування, які охоплюють як матеріал шкільного курсу математики так і матеріал молодших курсів вищих педагогічних навчальних закладів.

Детально розроблені штучні методи знаходження скінченних сум, які часто використовуються при розв’язанні олімпіадних задач.

Висвітлена теорія різницевого числення та різницевих рівнянь як основний засіб обчислення сум. Узагальнено метод невизначених коефіцієнтів для сум, породжених многочленами та квазімногочленами.

Проаналізована можливість застосування спеціальних чисел, зокрема чисел Стірлінга та Бернуллі, до знаходження сум.

Застосовано ймовірнісні міркування для обчислення деяких типів сум.

Особливу увагу звернено на методи апроксимації сум, формулу Ейлера-Маклорена та застосування її в теорії наближених обчислень.

Подано методичні рекомендації щодо викладу даного матеріалу в школах та вузах. Розв’язано біля 50 характерних вправ різного рівня складності та запропоновано задачі для закріплення теоретичного і практичного матеріалу.

Зміст

Робота присвячена моїй мамі Ягодзінській Л.В., а також “науковим батькам” – Волкову Ю.І. та Вороному О.М.

ВСТУП

Наука – це ясне пізнання істини, просвітлення розуму, непорочна радість життя, похвала юності, старості опора, будівельниця градів, фортеця успіху в нещасті, у щасті – укріплення, всюди вірний і нерозлучний супутник.

М.В. Ломоносов.

Аналіз наукового знання з філософської точки зору, показує, що безпосереднім завданням науки в усі часи було отримання об’єктивно вірних фактів про оточуючий світ та на основі цього – створення ефективних джерел виробництва матеріальних благ. Тому не дивно, що в період з кінця епохи Середньовіччя (XIII століття) аж до епохи Нового Часу відбувалося становлення та розмежування різних галузей науки, кожна з яких отримала свій предмет, свої методи дослідження і закони розвитку. Подібне ставлення до науки як до сукупності незалежних дисциплін, мало, очевидно, багато позитивних і негативних наслідків. Витіснення об’єкта вивчення за межі реального світу, відокремлення його найсуттєвіших ознак і властивостей та високий рівень абстракції, який все частіше виходив з рамок існуючої практики, призвів до повнішого й глибшого аналізу предметів і явищ. Ще в середині III ст. до н.е. Аристотель зазначав, що існує “знання заради знання” і вбачав у цьому вищу мету людського існування.

В той же час із середини XVII ст. прослідкуються тенденції до технологічної та матеріально виробничої орієнтації науки, виникають такі розділи як математична фізика, економічна географія, біохімія і т.п., що свідчить про інтеграцію знань у процесі науково-технічного прогресу.

Сучасний етап розвитку наукового знання характеризується відповідністю науки з людськими потребами, тобто головне завдання науки – створення матеріальних і духовних благ.

Описані тенденції суспільного бачення науки та її ролі в житті людства не могли не відобразитися на цариці наук – математиці. І, незважаючи на те, що математика як окремий вид практичної діяльності була виділена ще в Стародавньому Єгипті, в процесі становлення вона пройшла шлях від окремих буденних задач до стрункої аксіоматичної структури, формування якої завершилося вже в першій половині XX століття. Одним з основних апаратів дослідження світу та джерелом нових знань став математичний аналіз, що вивчає, в основному, неперервні функції методом границь.

Такий підхід при дослідженні оточуючого середовища став причиною бурхливого розвитку науки й техніки, що вилилося в створення принципово нових машин, механізмів і методів задоволення суспільних потреб. Але поряд із неперервною існувала й існує дискретна математика, що оперує скінченими множинами й функціями, визначеними на них. Так в магічному квадраті давньокитайського вченого Ло Шу [10], датованого X ст. до н.е., започатковані перші відомості з теорії ймовірностей та комбінаторного аналізу.

4	**9**	**2**
3	**5**	**7**
8	**1**	**6**

Якщо ж пригадати мислителів античної Греції: Анаксімандра, Демокріта, Спінозу та інших, то можна зробити висновок, що вже в ті далекі часи вчені схилялися до думки про дискретність світу речей, але, попри все, такі відомі науковці як Блез Паскаль (творець арифметичної машини), Леонардо Ейлер (найпродуктивніший математик XVIII ст.), П’єр Ферма (автор відомих теорем) розглядали дискретність лише як джерело цікавих закономірностей та широкий полігон нестандартних задач. Це, зокрема, знаходить свій відбиток у працях Готфріга Вільгельма Лейбніца, який помітив, що все можна представити у вигляді комбінації 0 та 1 і вбачав у цьому високий божий знак та містичну силу.

Але все змінило XX ст., точніше 50-60 роки: бурхливий розвиток електронно-обчислювальної техніки, ядерної фізики, квантової механіки, теорії програмування та генної інженерії поставив перед математикою якісно нові задачі, розв’язати які засобами класичного аналізу виявилося неможливо або занадто складно. Вислів К.Маркса “наука лише тоді стає наукою, коли вона починає користуватися математикою” в котрий раз підтвердив своє право на існування: лінгвістика, соціологія, історія, педагогіка і психологія почали вимагати створення зручного математичного апарату для своїх досліджень та обробки результатів.

Зважаючи на підвищений інтерес до дискретної математики виникла потреба в розробці ефективних методичних прийомів, що б застосовувалися при її вивченні в школах та вузах. При цьому мають враховуватися як психолого-педагогічні особливості школярів так і високі потреби суспільства в комп’ютерно грамотній молоді.

Таким чином основною методичною метою цієї роботи став аналіз зібраного з обраної теми матеріалу крізь призму шкільної освіти та можливість застосування його на факультативах, в процесі підготовки до олімпіад та під час систематизації та закріплення знань учнів з тем: “Послідовності”, “Наближені обчислення”, “Інтеграл”, “Застосування інтеграла”.

Наприклад, розглянемо два підходи при вивченні інтегралу, один з яких (класичний) призводить до формального застосування правил інтегрування, а інший – формує поняття інтегралу з використанням методів знаходження скінчених сум, що дає підґрунтя при написанні наближених алгоритмів та розвиває раціонально-логічний стиль мислення.

Пригадаємо поняття визначеного інтеграла Рімана: визначеним інтегралом функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ називається скінчена границя інтегральної суми при умові, що довжини відрізків Т-розбиття прямують до нуля.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda(T)} \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)\Delta x_k \,, \qquad (\ )$$

де $c_k \in [x_k; x_{k+1}]$

При цьому величина границі інтегральної суми не залежить від способу розбиття відрізка $[a;b]$ та від вибору точок c_k [ ].

Зафіксувавши Т-розбиття відрізка $[a;b]$ та вибір точок c_k і, знайшовши відповідне значення суми, отримуємо певне наближення визначеного інтеграла. Такий підхід дає можливість обчислити значення інтеграла з будь-якою наперед заданою точністю та змоделювати цей процес за допомогою комп’ютера, який працює лише з дискретними об’єктами, а не з нескінченною неперервністю. Продовжуючи цю тему та усвідомлюючи величезну роль ЕОМ в сучасній науці і техніці, автор підручника з чисельних методів Демидович Б.П. [ ] відзначає: “точные предельные процессы решения задач, связанные с бесконечным числом операций при работе на машине должны быть заменены приближенными алгоритмами, содержащими конечное число действий” [14].

Розглянемо такий приклад.

З інтегрального числення добре відомо що

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}. \qquad (*)$$

Спробуємо обчислити інтеграл (*), користуючись методами дискретної математики. Для цього виконаємо Т-розбиття відрізка $[0;1]$ точками:

$$0 = \frac{0}{n} < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \ldots < \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n} = 1, \text{ де } n \in \mathrm{N},$$

а точки c_k покладемо рівними лівому кінцю кожного з відрізків розбиття, тобто

$$c_k = x_k = \frac{k}{n}.$$

Складемо інтегральну суму, зазначену в (1)

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{k^2}{n^3} = \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1} k^2 .$$

З того, що $\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, отримуємо

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}.$$

Звідси випливає що

$$\int_0^1 x^2 dx \approx \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}, \text{ де } n \in \mathrm{N} \qquad (**)$$

Не важко помітити, що результат (*) є границею правої частини (**) при $n \to \infty$.

В III розділі ми повернемося до цього прикладу і покажемо, що апарат дискретної математики дає можливість не лише отримувати правильний результат, а й враховувати похибку, яка виникає в результаті розв’язання задач.

Отже, дискретна математика дозволяє будувати різного роду формули наближень, що дають вірні результати навіть там, де класичних аналіз безсилий.

З усього сказаного цілком логічним є висновок, зроблений доктором фізико-математичних наук, професором Волковим Ю.І. про те, що “в співвідношенні розділів математики, які вивчаються в педагогічних вузах та в школі, повинно значно посилитись роль дискретних розділів на противагу неперервним. … таке посилення буде досить сприятливим для цілей викладання, оскільки дискретна математика … значно доступніша, ніж класичний аналіз; вона скоріше може зацікавити тих, хто навчається, викличе менше труднощів і тому більше підходить для викладання.” [5]

Саме тому метою даної роботи стало систематизація та узагальнення матеріалу з теми: “Методи обчислення скінчених сум”, яка є одним з розділів дискретної математики і спирається на її методи досліджень. Як говорить автор відомих підручників: “Мистецтво програмування” Дональд Кнут “суми всюдисущі” [13] і з цим важко не погодитися: ряди, інтеграли, прогресії, гіпергеометричні перетворення, наближені обчислення, лінійна алгебра, теорія ймовірностей – ось далеко не повний список розділів математики, в яких усюди зустрічається відомий знак $\sum$ так зване сигма-позначення сум. До того ж роль інтеграла в дискретній математиці відіграє скінчена сума, а тому в еру комп’ютерних технологій, вивченню методів підсумовування необхідно приділити особливу увагу як в школах так і вузах.

Проаналізувавши зміст шкільного курсу математики [1, 2, 26] та завдання олімпіад різних рівнів [8, 10, 21, 22], та зіставивши це з результатами спостережень, проведених на педагогічній практиці, можна прийти до висновку, що незнання елементарних методів підсумовування призводить до заучування деяких тем, серед яких виділимо найважливіші: послідовності, арифметична та геометрична прогресії, інтеграл, початки теорії ймовірностей та комбінаторики. В той же час більшість із запропонованих читачеві підручників, що стосуються даної теми, розкривають її відірвано від реально існуючих задач, опускаються або занадто ускладнюються питання наближеного обчислення сум, зокрема що стосується похибки обчислень. До цього додається невизнання вітчизняними авторами суми як незалежного математичного оператора, а тому і правила роботи з ними та методи знаходження скінчених сум опускаються. Що ж стосується іноземної літератури, то треба відзначити, що тут справи набагато кращі, оскільки більшість англійських та американських університетів приділяють питанням дискретної математики не менше часу, ніж класичним розділам. Але це мало втішає, адже не кожен вчитель, тим паче студент чи учень, може дозволити собі підручник вартістю від $10 до $25 і вище.

А тому маємо надію, що робота приверне увагу в першу чергу студентів фізико-математичних факультетів, що бажають підняти свій освітньо-кваліфікаційний рівень до межі світового та вчителів-предметників, які прагнуть випустити з своїх лав дійсно сучасну й підготовлену молодь, яка б повністю відповідала жорстким вимогам суспільства.

I. Початкові відомості. Властивості сум

Разум растет у людей в соотвецтвии с мира познанием.

Эмпедокл.

Зазвичай праці з математики починають з означень, ми ж розпочнемо з позначення, позначення сум, адже коректне застосування математичного апарату та вільне користування ним є неодмінною складовою наукової культури.

Згідно з усталеними правилами використовують два способи позначення сум:

- сигма-позначення $\sum_{k=1}^{n} a_k$,   (1)   де a_k - загальний член суми, k - параметр підсумовування;
- запис суми в розгорнутому вигляді: $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Наприклад, сума квадратів перших n натуральних чисел, запишеться:

1) використовуючи сигма-позначення - $\sum_{k=1}^{n} k^2$. Тут $a_k = k^2$;

2) в розгорнутому вигляді - $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$.

Таким чином $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$.

Наведений приклад показує рівнозначність обох позначень. В той же час кожен з них має свої межі застосування, що обумовлено принципами наочності й доступності знань. Проілюструємо сказане, розглянувши $\sum_{k=1}^{10} k \cdot 2^k$ (*). Підставляючи поступово $k = 1$, $k = 2$ і так далі до $k = 10$ знайдемо відповідно перший, другий, … десятий член суми. Випишемо її:

$$\sum_{k=1}^{10} k \cdot 2^k = 1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + \ldots + 10 \cdot 2^{10} .$$

В цьому випадку говорять про представлення суми (*) в розгорнутому вигляді. А тепер спробуйте розв'язати зворотну задачу, а саме – згорнути суму:

$$2 + 16 + 72 + \ldots + 16384 \ ?$$

Ця вправа демонструє певні межі щодо використання позначення сум: якщо сигма-позначення дає зручний і компактний запис, то розгорнутий вигляд дозволяє представити суму "в усій красі", що в багатьох випадках спрощує як розв'язання так і розуміння матеріалу взагалі.

Повернемося до сигма-позначення сум. Вираз (1) є скороченим записом суми всіх членів a_k, порядковий номер яких лежить в межах від 1 до n. В загальному випадку запишемо:

$$\sum_{Q(k)} a_k\ ,$$

що позначає суму всіх членів a_k таких, що їх номер k задовольняє умові $Q(k)$, де $Q(k)$ - деяке висловлення відносно k.

Наприклад.

1) $\sum\limits_{1\le k\le n} a_k$ - сума всіх a_k, порядкові номери яких задовольняють подвійну нерівність $1 \le k \le n$;

2) $\sum\limits_{\substack{k=2m-1\\ k\le n,\ m\in N}} a_k$ - сума тих a_k, порядкові номери яких – непарні числа, але менші за деяке наперед задане число n;

3) $\sum\limits_{x\in\Omega} x^2$ - сума квадратів тих значень змінної x, які належать множині Ω;

4) $\sum\limits_{n_1+n_2+\ldots n_k} \dfrac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \ldots a_k^{n_k}$ - відома узагальнена формула бінома Ньютона, яка відбувається по всіх наборах $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$, що задовольняють рівність $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

Очевидним є той факт, що для кожного конкретного n обчислити значення суми (1), яке йому відповідає, принципових труднощів не створює, хоча і вимагає громіздких операцій. А тому в нашому розумінні задача на підсумовування вважається розв’язаною, якщо вдається виразити $\sum\limits_{Q(k)} a_k$ в замкненому вигляді як функцію від членів a_k та їх кількості n. Однак досить часто доводиться мати справу з сумами, які не виражаються в замкненому вигляді. В цьому разі розглядають задачу на знаходження не точного, а наближеного виразу для шуканої суми.

Наприклад зовні проста сума

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},$$

що носить назву гармонійної (від гармонійного ряду) не виражається в скінченному вигляді. Це ж стосується суми $\sum\limits_{k=1}^{n} e^{-k^2}$, яка є аналогом відомого інтегралу Пуассона, що має широке застосування в теорії ймовірностей та математичному аналізі.

З огляду на це, ми вважаємо вивчення наближених методів підсумовування одним з основних завдань даної роботи.

Але, перш ніж перейти до методів, розглянемо деякі важливі властивості сум, що стануть надійною опорою в подальшому опануванні пропонованого матеріалу.

Властивості сум.

1. Добуток деякого дійсного числа c і суми рівний сумі, кожен член якої помножено на це число, і навпаки.

$$c \cdot \sum_{Q(k)} a_k = \sum_{Q(k)} c \cdot a_k \ .$$

Це так звана розподільча властивість, яка дозволяє вносити і виносити сталі величини під знак і за знак суми.

2. Якщо кожен член $\sum_{Q(k)} a_k$ можна представити у вигляді $a_k = b_k + c_k$, то

$$\sum_{Q(k)} a_k = \sum_{Q(k)} (b_k + a_k) = \sum_{Q(k)} b_k + \sum_{Q(k)} c_k \ .$$

Ця властивість дає можливість розбивати одну суму на декілька сум або згортати їх в одну.

3. Нехай K - скінченна множина цілих чисел і $p(k)$ задана на цій множині перестановка. Тоді

$$\sum_{k \in K} a_k = \sum_{p(k) \in K} a_{p(k)} \ .$$

Властивість 3 стверджує, що члени суми можна переставляти в будь-якому порядку при умові, що $p(k)$ є перестановкою всіх елементів множини K, тобто $(\forall\, i \in K)\ (\exists!\, k)\colon\ p(k) = i$.

Наприклад,

$$\sum_{Q(k)} a_k = \sum_{Q(i)} a_i = \sum_{\substack{Q(m-n) \\ m \in Z}} a_{m-n} \ .$$

Незважаючи на деяку складність у формулюванні ця властивість має дуже широке застосування. Зокрема це стосується суми перших n натуральних чисел, виразити яку, шляхом перегрупування членів вдалося 9-му Гауссу [13] в 1786 році. Його міркування були приблизно такими:

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{(1 + 2 + \ldots + n) + (n + (n-1) + \ldots + 1)}{2} = \frac{1}{2}\left((1+n) + (2 + (n-1)) + \ldots + (n+1)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left((1+n) + (1+n) + \ldots + (1+n)\right) = \frac{1}{2} n(n+1),$$

що в прийнятих нами позначеннях запишеться у вигляді:

$$\sum_{k=1}^{n} k \overset{k \to n-k+1}{=} \frac{1}{2}\left(\sum_{1 \le k \le n} k + \sum_{1 \le n-k+1 \le n} (n-k+1)\right) \overset{вл.3}{=} \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{1 \le k \le n} (n-k+1)\right) \overset{вл.2}{=} \frac{1}{2}\sum_{1 \le k \le n} (k + n - k + 1) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{1 \le k \le n} (n+1) = \{\text{оскільки } (n+1) \text{ не залежить від k, то можна використати вл.1}\} = \frac{1}{2} n(n+1).$$

4. Об'єднання індексів підсумовування.

Нехай K і K' - довільні скінченні множини цілих чисел, тоді

$$\sum_{k\in K} a_k + \sum_{k\in K'} a_k = \sum_{k\in K\cup K'} a_k + \sum_{k\in K\cap K'} a_k \ . \qquad (*)$$

Доведення розіб'ємо на два випадки:

1) $K \cap K' = \varnothing$. Доведення очевидне і слідує з діаграм Ейлера-Венна.

2) $K \cap K' = K'' \neq \varnothing$.

Множину K' можна представити як об'єднання множин $K' \setminus K$ та K''. Врахувавши, що $K' \setminus K \cap K'' = \varnothing$ з 1-го випадку слідує

$$\sum_{k\in K'} a_k = \sum_{k\in K'\setminus K} a_k + \sum_{k\in K''} a_k \ .$$

Тоді рівність (*) перепишеться у вигляді

$$\sum_{k\in K} a_k + \sum_{k\in K'} a_k = \sum_{k\in K} a_k + \sum_{k\in K'\setminus K} a_k + \sum_{k\in K''} a_k \ .$$

З того, що $K \cap (K' \setminus K) = \varnothing$ і згідно випадку 1:

$$\sum_{k\in K} a_k + \sum_{k\in K'\setminus K} a_k = \sum_{k\in K'\cup K} a_k \ .$$

Оскільки, за побудовою, $K'' = K \cap K'$ маємо: $\sum_{k\in K} a_k + \sum_{k\in K'} a_k = \sum_{k\in K\cup K'} a_k + \sum_{k\in K\cap K'} a_k$.

Властивість доведено.

Не втрачаючи загальності та сповідуючи принцип аналогії, цю рівність будемо називати властивістю адитивності сум. Частіше всього вона зустрічається у вигляді:

$$\sum_{k=1}^{m-1} a_k + \sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k \text{ , при } 1 \le m \le n \text{ ; } m, n - \text{цілі} \ . \qquad (**)$$

Очевидно, що рівність (**) є наслідком рівності (*) при $K = \{1, 2, \dots, m-1\}$, $K' = \{m, m+1, \dots, n\}$, причому $K \cap K' = \varnothing$.

В наступному розділі ми повернемося до перелічених властивостей та виведемо на основі них деякі з методів обчислення скінченних сум. Але навіть вже цього матеріалу досить для розв'язання цілого класу задач, що передбачають перегрупування членів суми, використання відомих тотожностей та раніше вивченого матеріалу.

Приклад 1.1. *Знайти формулу суми членів арифметичної прогресії:* $\sum_{k=1}^{n} a_k$.

Нагадаємо, арифметичною прогресією називається послідовність, кожен наступний член якої відрізняється від попереднього на деяке наперед задане число d ($a_k = a_{k-1} + d$), що називається різницею прогресії. Таким чином, загальний член арифметичної прогресії можна подати у вигляді: $a_k = a_1 + (k-1)\cdot d$, де a_1 - перший член послідовності.

Тоді

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}\left(a_1 + (k-1)d\right) \overset{в.л.1,2}{=} a_1\sum_{k=1}^{n}1 + d\sum_{k=1}^{n}k - d\sum_{k=1}^{n}1 = a_1 n + \frac{1}{2}dn(n+1) - dn =$$

$$= n\left(a_1 + \frac{1}{2}d(n+1) - \frac{1}{2}d\right) = n\left(a_1 + \frac{1}{2}d(n-1)\right).$$

Розглянута вище вправа показує, що інтуїтивно зрозумілі властивості скінченних сум дають змогу вже на перших етапах вивчення теми “Послідовності”, отримати з учнями якісно новий результат, який спиратиметься лише на раніше вивчений матеріал та сторонній “туманних” евристичних здогадок, що пропонують автори проаналізованих нами підручників.

На завершення розділу розглянемо кілька вправ, характер яких обумовлює можливість їх розв’язання при вивченні різноманітних тем, що дозволить вчителю розкрити суть і механізми міжпредметних зв’язків.

Приклад 1.2. *Нехай* $\varphi(n)$ *- кількість натуральних чисел, які не перевищують* n *і взаємнопрості з* n*. Довести, що сума цих чисел рівна* $\frac{n}{2}\varphi(n)$.

Отже, необхідно довести, що

$$\sum_{\substack{k=1\\(k,n)=1}}^{\varphi(n)} k = \frac{n}{2}\varphi(n),$$ де (k,n) - найбільший спільний дільник чисел n і k.

Нагадаємо, зазначена в умові функція $\varphi(n)$ є функцією Ейлера, яка широко застосовується в алгебрі та теорії чисел.

Для розв’язування задачі скористаємося тим, що коли n і k взаємно прості, то числа n і $n-k$ також є взаємно простими. Цей факт і є ключовим моментом, адже, замінивши k на $n-k$ отримуємо:

$$\sum_{\substack{k=1\\(k,n)=1}}^{\varphi(n)} k + \sum_{\substack{k=1\\(n-k,n)=1}}^{\varphi(n)} (n-k) = 2\cdot S,$$ де

S - шукана сума.

Скориставшись властивістю 2 запишемо:

$$\sum_{\substack{k=1\\(k,n)=1}}^{\varphi(n)} k + \sum_{\substack{k=1\\(n-k,n)=1}}^{\varphi(n)} (n-k) = \sum_{\substack{k=1\\(n-k,n)=1}}^{\varphi(n)} (k+n-k) = \sum_{\substack{k=1\\(k,n)=1}}^{\varphi(n)} n = n\cdot\varphi(n) = 2\cdot S.$$

Таким чином $S = \frac{n}{2}\varphi(n)$, що й треба було довести.

Приклад 1.3. *Нехай* n - *складене число і* $1 = d_0 < d_1 < d_2 < \ldots < d_m = n$ - *його дільники. Довести, що* $\frac{2}{\ln n}\sum_{k=1}^{m-1}\ln d_k$ *є цілим числом.*

Неважко помітити, що добуток рівновіддалених дільників в нерівності дорівнює n:

$$d_k \cdot d_{m-k} = n.$$

Таких рівностей, врахувавши повторення, існує стільки скільки існує дільників числа n, тобто $(m+1)$. Отже, можемо записати:

$$n^{m+1} = (d_0 \cdot d_1 \cdot \ldots \cdot d_m)^2.$$

Прологарифмуємо останню рівність за основою e:

$$(m+1)\ln n = 2\ln(d_0 \cdot d_1 \cdot \ldots \cdot d_m).$$

Використавши те, що $\ln(N_1 \cdot N_2) = \ln N_1 + \ln N_2$ отримаємо

$$(m+1)\ln n = 2\sum_{k=0}^{m}\ln d_k.$$

Звідки: $\frac{2}{\ln n}\sum_{k=1}^{m-1}\ln d_k = (m-1)$. Оскільки $(m-1)$ - ціле число, то робимо висновок про розв'язання поставленої проблеми.

Підсумок. Розглянутий в розділі матеріал інтуїтивно зрозумілий, а тому не вимагає додаткового часу на його пояснення. В той же час клас задач, на які він може бути поширений охоплює як шкільний курс математики 7-11 класів (приклади 1 та 3) так і теоретичну базу молодших курсів фізико-математичних факультетів вузів (приклад 2).

II. Методи обчислення скінченних сум

Конечно, мы будем учиться доказывать, но мы будем также учиться догадываться.

Д. Пойа.

1. Штучні методи

“To be or not to be” – це класичне шекспірівське питання ставлять перед собою випускники шкіл, коледжів, училищ, вузів, а також ті, хто стоять на порозі самостійного дорослого життя, де кожен оцінюється через призму професіоналізму, індивідуальних якостей. Статистика стверджує: 80% молоді пов’язують рівень свого матеріального забезпечення з рівнем отриманої освіти. При цьому наголос робиться на те, що результатом навчання має стати його практична реалізація, тобто застосування у сфері професійних інтересів.

Це, в першу чергу, стосується і математичної освіти. З огляду на поставлені перед методикою навчання проблеми та переосмисливши їх з точки зору обраної теми, ми розглянемо спочатку штучні методи обчислення скінченних сум, які базуються на раніше вивченому матеріалі, що не вимагатиме необхідності опановувати додаткові теореми, властивості, ознаки, з якими нам доведеться зустрітися в наступних главах розділу.

1.1. Методи, що базуються на властивостях сум

Розглядаючи в першому розділі основні властивості скінченних сум, ми дійшли до висновку про їх ефективне застосування при розв’язуванні певного класу задач. Легко помітити, що в кожному прикладі використовується прийом перегрупування членів із подальшим вивченням поведінки відповідних сум. Цей прийом покладено в основу одного з методів підсумовування – *метода зведення*. Розглянемо його.

Позначимо

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \qquad (*)$$

Розглянемо суму $S_n + a_{n+1}$:

$$S_n + a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} a_k = a_0 + \sum_{k=1}^{n+1} a_k \overset{k \to k+1}{=} a_0 + \sum_{k=0}^{n} a_{k+1} .$$

Отже,

$$S_n = a_0 + \sum_{k=0}^{n} a_{k+1} - a_{n+1} .$$

Сума $\sum\limits_{k=0}^{n} a_{k+1}$, зазначена в останній рівності, дуже схожа на S_n. Тепер якщо вдається, використовуючи властивості 1-4 розділу I, виразити $\sum\limits_{k=0}^{n} a_{k+1}$ через S_n, то, звівши подібні доданки, отримуємо замкнений вираз для шуканої суми.

Приклад 2.1. *Знайти суму квадратів перших* n *натуральних чисел* $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$.

Позначимо через $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} k^3$ і розглянемо $S_n + (n+1)^3$.

$$S_n + (n+1)^3 = \sum_{k=0}^{n}(k+1)^3 = \sum_{k=0}^{n}\left(k^3 + 3k^2 + 3k + 1\right) \overset{вл.1,2}{=} S_n + 3\sum_{k=0}^{n}k^2 + 3\sum_{k=0}^{n}k + \sum_{k=0}^{n}1 =$$

$$= S_n + 3\sum_{k=0}^{n}k^2 + 3\frac{n(n+1)}{2} + (n+1).$$

Таким чином, отримали

$$S_n + (n+1)^3 = S_n + 3\sum_{k=0}^{n}k^2 + 3\sum_{k=0}^{n}k^2 + 3\frac{n(n+1)}{2} + (n+1).$$

Звідси виражаємо суму квадратів перших n натуральних чисел:

$$\sum_{k=0}^{n}k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Приклад 2.2. З*найти* $\sum\limits_{k=0}^{n} k \cdot 2^k$.

Функція $f(x) = x \cdot 2^x$ - квазімногочлен. Під квазімногочленами в математиці прийнято вважати функції, що є лінійними комбінаціями добутків многочленів на показникові функції.

Виділення квазімногочлена в окрему математичну структуру обумовлено кількома причинами, серед яких виділимо можливість опису за допомогою них реальних фізичних, хімічних та біологічних процесів. Тому часто приходиться мати справу із сумами, що містять квазімногочлени.

Слідуючи загальній схемі методу зведення, запишемо:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k \cdot 2^k .$$

$$S_n + (n+1)\cdot 2^{n+1} = \sum_{k=0}^{n}(k+1)\cdot 2^{k+1} = \sum_{k=0}^{n}k \cdot 2^{k+1} + \sum_{k=0}^{n}2^{k+1} = 2\sum_{k=0}^{n}k \cdot 2^k + \frac{2^{n+2} - 2}{2-1} = 2S_n + 2^{n+2} - 2.$$

Отже,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k \cdot 2^k = 2^{n+1}(n-1) + 2.$$

Освоївши метод зведення, підемо далі.
Пригадайте як у школі вчитель малював таблицю:

$1 = 1 = 1^2$

$1 + 3 = 4 = 2^2$

$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$

$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$,

з якої напрошувався наступний результат: $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$. Потім, користуючись методом математичної індукції, доводилося, що дійсно, сума перших n непарних чисел рівна квадрату їх кількості.

Приклад 2.3. *Обчислити суму* $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n!$, *де* $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.
Випишемо кілька перших значень шуканої суми.

$1 \cdot 1! = 1$

$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! = 5$

$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! = 23$

$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + 4 \cdot 4! = 119$

Легко помітити, що $1 = 2! - 1$, $5 = 3! - 1$, $23 = 4! - 1$, $119 = 5! - 1$, звідки виникає наступне припущення

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n + 1)! - 1 .$$

Провівши доведення методом математичної індукції, переконуємося в правильності отриманого результату.

Ми не можемо дати жодних порад щодо того як “відчути істину”; інколи це вдається зробити формалізувавши певні перетворення та властивості, інколи – проробивши деяку кількість дослідів вбачають закономірність, але, не зважаючи на це, *довести існуючий результат часто важливіше, ніж відшукати його*[1].

Що ж стосується скінченних сум, то властивості 1-4 розділу I дозволяють коректно виконувати перетворення над ними в процесі доведення методом математичної індукції.

Приклад 2.4. *Довести, що* $\sum_{k=1}^{n} \sin k\alpha = \sin\alpha + \sin 2\alpha + \ldots + \sin n\alpha = \dfrac{\sin\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

Доведення проведемо методом математичної індукції. За базис індукції виберемо $n = 1$.

При $n = 1$ рівність виконується. Дійсно, $\sum_{k=1}^{1} \sin k\alpha = \dfrac{\sin{\alpha/2}\,\sin\alpha}{\sin{\alpha/2}} = \sin\alpha$.

[1] Яскравим історичним прикладом цього є відкриття Колумбом нового континенту, що був названий Америкою саме на честь вченого Амеріго Веспуччі, який довів, що це дійсно Новий Світ.

Припустимо, що при n = m

$$\sum_{k=1}^{m} \sin k\alpha = \frac{\sin\frac{m\alpha}{2}\sin\frac{(m+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} \qquad (*)$$

Доведемо, що при n = m + 1

$$\sum_{k=1}^{m+1} \sin k\alpha = \frac{\sin\frac{(m+1)\alpha}{2}\sin\frac{(m+2)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} \qquad (**)$$

Розглянемо

$$\sum_{k=1}^{m+1} \sin k\alpha \overset{вл 2,4}{=} \sum_{k=1}^{m} \sin k\alpha + \sin(m+1)\alpha \overset{(**)}{=} \frac{\sin\frac{m\alpha}{2}\sin\frac{(m+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \sin(m+1)\alpha =$$

$$= \frac{\sin\frac{m\alpha}{2}\sin\frac{(m+1)\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\sin(m+1)\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\frac{(m+1)\alpha}{2}\left(\sin\frac{m\alpha}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{(m+1)\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\sin\frac{(m+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\left(\sin\frac{m\alpha}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{m\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{m\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{\sin\frac{(m+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\left(\sin\frac{m\alpha}{2}\cos\alpha + \cos\frac{m\alpha}{2}\sin\alpha\right) = \frac{\sin\frac{(m+1)\alpha}{2}\sin\left(\frac{m\alpha}{2}+\alpha\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\frac{(m+1)\alpha}{2}\sin\frac{(m+2)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Отже, рівність (*) виконується для довільного натурального n .

1.2. Застосування диференціального та інтегрального числення до обчислення скінченних сум

З часу винайдення диференціального та інтегрального числення світ дуже змінився, а наука завдяки цьому, дійсно стала Наукою – чіткою і строгою, без розмитих тверджень та інтуїтивних доведень.

Поступово з'ясувалося, що з допомогою поняття похідної та інтеграла ефективно розв'язуються багато елементарних задач: доведення нерівностей, розв'язування рівнянь, обчислення сум і т.п. Але, зважаючи на дослідницький характер роботи в цьому випадку, більшість вчителів схильні мало уваги приділяти цим питанням.

Аналізуючи власний педагогічний досвід та роботу, проведену із студентами старших курсів, приходимо до невтішного висновку: як учні так і більшість майбутніх учителів догматують та абсолютизують отриманні знання, розглядаючи при цьому кожен математичний розділ відірвано від інших, втрачаючи таким чином інтегративну функцію науки, що є неодмінним атрибутом при комплексному підході до поставлених проблем.

Тому застосування диференціального та інтегрального числення до розв'язування задач з підсумовування дозволить не лише розвивати в учнів логічне мислення та математичну культуру, а й зробить їх невеликі дослідження міцним фундаментом в подальших наукових звершеннях.

Опишемо ідею, що використовується при залучені похідної та первісної до обчислення скінченних сум [4].

Часто виконати певні тотожні перетворення виявляється занадто складно. Тоді даний вираз розглядають як функцію f від деякої змінної x, зміст якої з'ясовується при конкретних умовах. Після такої заміни може статися, що або $f'(x)$, або $F(x)$ - первісна легше піддаються спрощенню. Виконавши відповідні перетворення над похідною чи первісною, повертаємося до початкової функції та значення незалежної змінної x.

Приклад 2.5. *Знайти суму* $\sum_{k=1}^{n} k \cdot x^{k-1} = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}$. (*)

Розглянемо шукану суму як функцію $f(x)$.

$$f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} \qquad (**)$$

Неважко помітити що

$$F(x) = x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n \qquad (***)$$

є первісною функції $f(x)$.

З другого боку, вираз (***) є не чим іншим як геометричною прогресією із знаменником $q = x$. Тоді

$$F(x) = \frac{x(x^n - 1)}{x - 1}.$$

Пригадавши зв'язок $F(x)$ та $f(x)$, знаходимо

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} = f(x) = F'(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2},\ x \neq 1.$$

При $x = 1$ сума (*) перетворюється у відому нам "гауссівську суму" $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Підставляючи в вираз (*) різні значення x окрім 1, будемо отримувати цілком певні суми.

Наприклад,

$x = \frac{1}{2}$: $\sum_{k=1}^{n} k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 1 + 1 + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \frac{5}{16} + \ldots + \frac{n}{2^{n-1}} = 4 - \frac{2+n}{2^{n-1}}$.

Перевірка:

$n = 1$ $\quad 1 = 4 - \frac{2+1}{1} = 1$;

$n = 2$ $\quad 2 = 4 - \frac{2+2}{2} = 2$;

$n = 3$ $\quad 2\frac{3}{4} = 4 - \frac{2+3}{4} = 2\frac{3}{4}$.

$x = 2$: $\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^{k-1} = 1 + 4 + 12 + 32 + \ldots + n \cdot 2^{n-1} = 2^n(n-1) + 1$.

Перевірка:

$n = 1$ $\quad 1 = 2 \cdot 0 + 1 = 1$;

$n = 2$ $\quad 5 = 2^2(2-1) + 1 = 5$;

$n = 3$ $\quad 17 = 2^3(3-1) + 1 = 17$.

Приклад 2.6. *(Наслідок). Обчислити* $1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 7 + \ldots + n \cdot (2^n - 1)$.

Виконаємо наступні перетворення:

$$1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 7 + \ldots + n \cdot (2^n - 1) = 1 \cdot (2^1 - 1) + 2 \cdot (2^2 - 1) + \ldots + n \cdot (2^n - 1) = (1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + \ldots + n \cdot 2^n) -$$

$$-(1 + 2 + \ldots + n) = 2\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} k = 2(2^n(n-1) + 1) - \frac{n(n+1)}{2} = 2^{n+1}(n-1) + \frac{4 - n - n^2}{2}.$$

Отже,

$$1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 7 + \ldots + n \cdot (2^n - 1) = 2^{n+1}(n-1) + \frac{4 - n - n^2}{2}.$$

Вправа 2.5 розкриває суть методу, але часто приходиться мати справу із сумами, в яких змінна відсутня. В цьому разі важливо вдало підібрати функцію $f(x)$, яка породжує шукану суму при деякому значенні змінної.

Приклад 2.7. *Виразити суму в замкненому вигляді* $1+2^2\cdot 3+2^4\cdot 5+\ldots+2^{2n-2}\cdot(2n-1)$.

Оскільки роль x має відігравати один і то й же вираз, то першою задачею є відшукання інваріанту, притаманного всім доданкам суми. Неважко помітити, що це 2. Робимо висновок про те, що шукана сума є окремим випадком функції

$$f(x)=1+3x^2+5x^4+\ldots+(2n-1)x^{2n-2}\text{, при } x\neq 2.$$

Знайдемо первісну функції $f(x)$

$$F(x)=x+x^3+x^5+\ldots+x^{2n-1},$$

яка є геометричною прогресією із знаменником $q=x^2>1$. Згорнемо $F(x)$

$$F(x)=\frac{x\left(x^{2n}-1\right)}{x^2-1}.$$

Повертаючись до $f(x)$, отримуємо

$$f(x)=F'(x)=\frac{(2n-1)x^{2n+2}-(2n+1)x^{2n}+x^2+1}{\left(x^2-1\right)^2},\ x\neq\pm 1.$$

Звідси при $x=2$ виразимо значення шуканої суми

$$1+2^2\cdot 3+2^4\cdot 5+\ldots+2^{2n-2}\cdot(2n-1)=\frac{(2n-1)2^{2n+2}-(2n+1)2^{2n}+5}{9}=\frac{2^{2n}(6n-3)+5}{9}.$$

В деяких випадках розв'язання задачі на підсумовування передбачає знаходження не первісної $F(x)$ до побудованої функції $f(x)$, а похідної $f'(x)$. Виконавши перетворення над функцією $f'(x)$, повертаємося до $f(x)$ ($f(x)$ - первісна до $f'(x)$). Слід мати на увазі, що $f(x)$ визначається з точністю до сталої, значення якої уточнюється з початкових умов.

Приклад 2.8. *Спростити вираз*

$$2C_n^0+\frac{2^2C_n^1}{2}+\frac{2^3C_n^2}{3}+\ldots+\frac{2^{n+1}C_n^n}{n+1}. \qquad (*)$$

1) Сталим компонентом кожного доданку є двійка. Тому робимо висновок, що вираз (*) – значення функції

$$f(x)=xC_n^0+\frac{x^2C_n^1}{2}+\frac{x^3C_n^2}{3}+\ldots+\frac{x^{n+1}C_n^n}{n+1}\ \text{ при } x=2. \qquad (**)$$

2) Знайдемо похідну

$$f'(x)=C_n^0+xC_n^1+x^2C_n^2+\ldots+x^nC_n^n. \qquad (***)$$

Прирівнюючи запис (***) із формулою бінома Ньютона

$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\ldots+C_n^{n-1}ab^{n-1}+C_n^nb^n$$

при $a=1$, $b=x$, перепишемо (***)

$$f'(x) = (1+x)^n .$$

Оскільки $f(x)$ - первісна функції $f'(x)$, то не складає особливих труднощів знаходження замкненого виразу для $f(x)$.

$$f(x) = \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} + c .$$

З умови (**) випливає, що $f(0) = 0$. З останньої рівності визначимо сталу c.

$$0 = \frac{(1+0)^{n+1}}{n+1} + c ; \quad c = -\frac{1}{n+1} .$$

Звідси

$$f(x) = \frac{(1+x)^{n+1} - 1}{n+1} .$$

Підставляючи в останню рівність $x = 2$, отримуємо

$$2C_n^0 + \frac{2^2 C_n^1}{2} + \frac{2^3 C_n^2}{3} + \ldots + \frac{2^{n+1} C_n^n}{n+1} = \frac{3^{n+1} - 1}{n+1} .$$

Зробимо підсумок. Застосування диференціального та інтегрального числення до обчислення скінченних сум передбачає:

1) дослідження та винайдення[1] функції $f(x)$, яка породжує дану суму при певному значенні незалежної змінної;
2) проаналізувати перспективи використання похідної $f'(x)$ чи первісної $F(x)$ на предмет можливості виконання тотожних перетворень;
3) повернутися до функції $f(x)$, використовуючи одне із співвідношень:

   а) $f(x) = F'(x)$;

   б) $f(x) = \int f'(x)dx + c$;
4) з допустимих початкових умов визначити значення сталої c.
5) підставити в отриманий вираз для $f(x)$ значення змінної x, яке відповідає умові 1) та записати отриманий результат як відповідь.

[1] Якщо це можливо.

1.3. Методи, що допускають геометричну інтерпретацію

Цей розділ може бути з успіхом використаний у слабких класах при поясненні теми "Прогресія", а також як дослідницька робота на факультативних заняттях.

Методи, що допускають геометричну інтерпретацію спираються на властивість адитивності сум, а оскільки ця властивість як аксіома притаманна і поняттю площі, то стало можливим інтерпретувати алгебраїчні задачі мовою геометричних об'єктів.
Таким чином вивчення певних сум відбувається в процесі пізнавальної діяльності учнів, що не лише зацікавить, а й дозволить розвивати творчу уяву, прагнення до відкриття нових закономірностей та поглибить зв'язок алгебри з геометрією.

Приклад 2.9. *Знайти суму* $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$.

Нам вже відомо, що $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Знайдемо тепер цей результат, користуючись властивістю адитивності. Для цього розглянемо прямокутники із сторонами $a = 1$, $b = k^3$, $k = \overline{1..n+1}$ (Мал. 2.1).

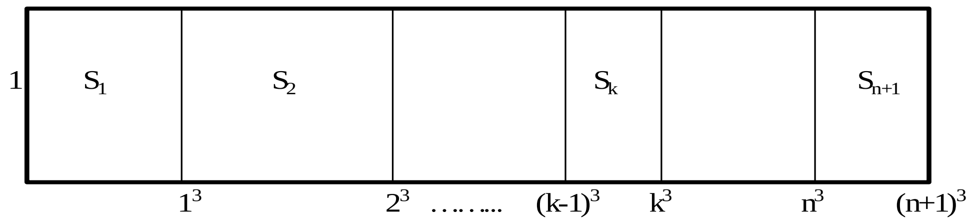

Рис. 2.1 Геометричне тлумачення суми квадратів перших n натуральних чисел.

Очевидно що

$$S_1 + S_2 + \ldots + S_{n+1} = (n+1)^2 \cdot 1. \qquad (*)$$

За побудовою

$$S_k = k^3 - (k-1)^3.$$

Тобто, рівність (*) перепишеться у вигляді

$$1 + \left(2^3 - 1^3\right) + \left(3^3 - 2^3\right) + \ldots + \left((n+1)^3 - n^3\right) = (n+1)^3 \cdot 1$$

Так як $(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$, то з (**) отримуємо

$$1 + \left(3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1\right) + \left(3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1\right) + \ldots + \left(3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1\right) = (n+1)^3.$$

Перегрупуємо члени в останній рівності

$$3\left(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2\right) + 3(1 + 2 + \ldots + n) + (n+1) = (n+1)^3.$$

Звідси

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{3}\left((n+1)^3 - \frac{3}{2}n(n+1) - (n+1) \right) = (n+1)\left(n^2 + \frac{1}{2}n \right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Аналогічним чином можна знайти суми кубів, четвертих, п’ятих і т.д. степенів чисел натурального ряду.

Поряд із цими геометричну інтерпретацію допускають й інші суми. В цьому випадку найважливішим етапом є підбір площ S_k, які при кожному конкретному k перетворюються в якийсь з доданків шуканої суми.

Приклад 2.10. *Побудувати геометричну інтерпретацію суми* $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n!$. Розглядаючи метод математичної індукції, в прикладі 2.3. було показано, що ця сума рівна $(n+1)! - 1$. Тепер нашою задачею буде геометрично отримати цей результат, аналогічно попередній вправі.

Розглянемо прямокутники зі сторонами $a = 1$ і $b_k = k \cdot k! = (k+1)! - k!$, $k = \overline{1..n+1}$ (Мал. 2.2).

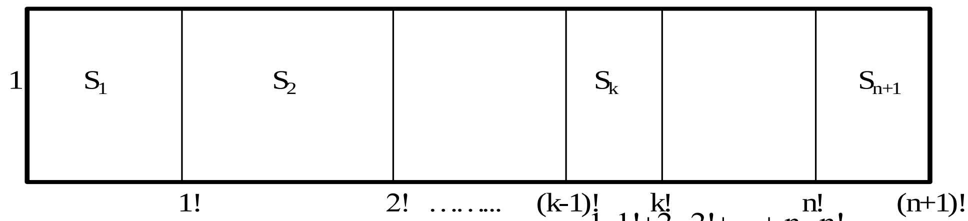

Рис. 2.2 Геометричне тлумачення суми $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n!$.

Площа кожного прямокутника $S_k = k \cdot k! \cdot 1$, а $S_1 + S_2 + \ldots + S_{n+1} = (n+1)!$. Врахувавши, що S_2 відповідає першому доданку суми, S_3 - другому і т.д., запишемо

$$S_2 + \ldots + S_{n+1} = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - S_1 = (n+1)! - 1.$$

Спираючись на дослідження, проведені на педагогічній практиці, можна констатувати той факт, що учням імпонує робота дослідника, а тому вони охоче і азартно поринають у пошук геометричних інтерпретацій сум. Це вимагає від вчителя додаткових знань, вмінь, навичок та інтуїції, бо часто учні знаходять такі форми вираження своїх ідей, які не зустрінеш у жодному підручнику. На підтвердження цих слів розглянемо цікаву ідею, запропоновану в [15].

Приклад 2.11. *Довести з допомогою гномонів*[1]*, що сума перших n непарних чисел дорівнює квадрату їх кількості.*

Для цього автор пропонує побудувати квадрат, розмірності $n \times n$, заповнений одиницями.

[1] Гномон – фігура, яка нагадує літеру **Г**.

1	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	**n**
1	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	**3**
1	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	**2**
1	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	**1**
n				**2**	**1**	

Проаналізуємо. Перший гномон 1:1 має одну одиничку, другий {1:2, 2:2, 2:1} - 3 одинички, третій {1:3, 2:3, 3:3, 3:2, 3:1} – 5 і т.д. Таким чином, сума одиниць усіх гномонів перетворюється в шукану суму:

$$1+3+5+\ldots+(2n-1).$$

Цим вичерпуються всі одиниці квадрату зі стороною n, яких в ньому налічується рівно n^2. Робимо висновок

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2,$$

що й треба було довести.

На цьому автор зупиняється, навіть не зазначаючи, що інтерпретована так сума є не чим іншим як арифметичною прогресією.

Спробуємо зробити крок далі, а саме: побудуємо квадрат розмірності $n \times n$, заповнений однаковими числами. Аналогічно, побудуємо суму чисел кожного гномона

$$a+3a+5a+\ldots+(2n-1)a.$$

a	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	**N**
a	***a***	***a***	***a***	***a***	***a***	**3**
a	***a***	***a***	***a***	***a***	***a***	**2**
a	***a***	***a***	***a***	***a***	***a***	**1**
n				**2**	**1**	

З одного боку отримали арифметичну прогресію з різницею $d = 2a$. З другого боку, користуючись попередніми міркуваннями можна показати, що її сума рівна na^2.

Отже, використання гномонів дозволяє в доступній формі провести перші заняття з теми “Арифметична прогресія” та сприяє інтуїтивному виведенню відповідних формул, при умові, коли різниця прогресії рівна подвоєному першому членові. А оскільки ця тема є пропедевтикою до вивчення теорії границь, то, на нашу думку, глибоке розуміння та дослідне обґрунтування відкинуть формалізм в опануванні матеріалу.

На закінчення пункту пропонуємо ознайомитися з геометричною інтерпретацією для суми геометричної прогресії із знаменником $|q| < 1$

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots. \qquad (*)$$

Розглянемо малюнок 2.3.

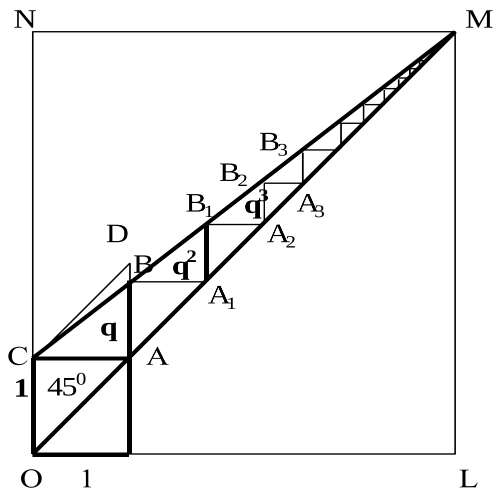

Рис. 2.3 Інтерпретація нескінченної спадної геометричної прогресії

Відрізки OC=1, AB=q, $A_1B_1=q^2$, $A_2B_2=q^3$ і т.д. графічно зображають члени прогресії (*). Це слідує з подібності відповідних трикутників. Наприклад, $\Delta ACB \sim \Delta A_1BB_1$:

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1B}{AC};\ \frac{A_1B_1}{q} = \frac{q}{1} \Rightarrow A_1B_1 = q^2.$$

Аналогічними міркуваннями доводимо, що

$$A_kB_k = q^k,\ k = 2, 3, \ldots.$$

З умови $OC + AB + A_1B_1 + \ldots + A_nB_n + \ldots = ML$ випливає: ML - графічно зображає суму (*). Знайдемо ML. Для цього скористаємося тим, що $\Delta CBD \sim \Delta OCM$, а $\Delta ACD \sim \Delta LOM$. Складемо відповідні пропорції:

$$\frac{BD}{OC} = \frac{CD}{OM} = \frac{AD}{ML};\ \frac{BD}{OC} = \frac{AD}{ML} \Rightarrow ML = \frac{OC \cdot AD}{BD} = \frac{1}{1-q},$$

що відповідає результату, отриманому алгебраїчним шляхом.

Приходимо до висновку

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots = \frac{1}{1-q}, \text{ де } |q| < 1.$$

Єдиний висновок, який можна і треба зробити з даного пункту виражається словами професора фізики Вашингтонського університету A.Calandra в статті “Angels on a Pin” з уст студента-фізика:“...he was fed up with high school and college instructors trying to teach him how to think, to use the “scientific method”, and to explore the deep inner logic of the subject in a pedantic way, rather than teaching ... the structure of the subject”[1].

[1] ...він був ситий по горло школою та викладачами коледжу, які вчили його як думати, використовувати “науковий метод” і досліджувати логіку предмету звичайними шляхами, замість того, що вчити структури предмету.

1.4. Зведення шуканої суми до відомих сум

Розглянуті в попередніх пунктах приклади є по-суті елементарними, тому доцільно, об'єднавши викладений вище матеріал, розглянути більш складні задачі олімпіадного та творчого характеру. Це дасть змогу прослідкувати взаємозалежність методів обчислення скінченних сум, використати набутий досвід та знайдені суми при розв'язанні складніших вправ.

Особлива увага звертається на зведення шуканої суми до відомих, як один із найпоширеніших способів розв'язання нестандартних вправ. В той же час неможливо описати загальний алгоритм, тому основною метою даного пункту став аналіз нетипових завдань, що дозволить розвивати в учнів і студентів елементи логіки та математичної інтуїції.

Приклад 2.12. *(Київська олімпіада 1958 року, 10 клас) Числа* $1, 2, 3, \ldots, \mathrm{k}^2$ *розміщені наступним чином:*

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & k \\ k+1 & k+2 & k+3 & \ldots & 2k \\ 2k+1 & 2k+2 & 2k+3 & \ldots & 3k \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (k-1)k+1 & (k-1)k+2 & (k-1)k+3 & \ldots & k^2 \end{array} \qquad (*)$$

Вибирають довільне число і викреслюють строчку та стовпчик, які містять це число. Так роблять k разів. Знайти суму вибраних таким чином чисел.

Спосіб 1. Запропонований автором підручника [9].

Викреслимо k з усіх чисел другої строчки, $2\mathrm{k}$ з усіх чисел третьої строчки і т.д. до останньої строчки. Отримаємо таблицю з однаковими строчками. Тому, якщо вибрати k чисел вказаним в умові способом, то їх сума рівна

$$1+2+3+\ldots+k=\frac{k(k+1)}{2}.$$

Звідси випливає, що шукана сума рівна

$$\frac{k(k+1)}{2}+k+2k+\ldots+(k-1)k=\frac{k(k^2+1)}{2}.$$

Спосіб 2. Описаний підхід до розв'язання поставленої проблеми, на нашу думку, більше схожий на абстрактно-дедуктивний метод, ніж на метод, яки вчить мислити творчо, не стандартно та продуктивно. Тому ми пропонуємо інший підхід – навчаючо-розвиваючий.

Для початку розглянемо випадок для $\mathrm{k}=5$ і виконаємо умову задачі 3 рази, кожен раз вибираючи іншу комбінацію чисел. Наприклад,

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

*5+7+13+16+24=**65***

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

*1+9+13+20+22=**65***

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

*1+7+13+19+25=**65***

Виникає припущення, що при фіксованому k сума вибраних згідно умови елементів не залежить від їх вибору, а тому за значення шуканої суми можна взяти суму арифметичної прогресії діагональних елементів таблиці (*) (див. випадок 3)

$$1+(k+2)+(2k+3)+\ldots+((k-1)k+k), \text{ де } \mathrm{d}=\mathrm{k}+1.$$

Отже, шукана сума рівна

$$S_k=\frac{1+(k-1)k+k}{2}\cdot k=\frac{k(k^2+1)}{2},$$

що відповідає отриманому вище результату.

Таким чином, розглянувши кілька часткових випадків, отримали результат-припущення для доведення якого можна застосувати метод математичної індукції. Але залишимо це працьовитим і всидливим, а самі підемо далі.

Ще раз проаналізувавши умову, приходимо до висновку: шукана сума – це сума k елементів взятих по одному і тільки одному з кожного рядка і кожного стовпчика. До того ж будь-який елемент таблиці (*), що стоїть на перетині i-го рядка та j-го стовпчика представляється у вигляді

$$a_{ij}=i\cdot k+j, \text{ де } i=\overline{0..k-1},\ j=\overline{1..k}.$$

Тоді сума прийме вид

$$S_k=(i_0\cdot k+j_1)+(i_1\cdot k+j_1)+\ldots+(i_{k-1}\cdot k+j_k),$$

причому $i_n\neq i_m$, $j_p\neq j_q$, якщо $n\neq m$, $p\neq q$ (**).

Згрупуємо подібні доданки

$$S_k=k(i_0+i_1+\ldots+i_{k-1})+(j_1+j_2+\ldots+j_k).$$

Після цього, враховуючи умову (**), стає очевидним що

$$i_0+i_1+\ldots+i_{k-1}=0+1+2+\ldots+(k-1)=\frac{k(k-1)}{2};$$

$$i_1+j_2\ldots+i_k=1+2+\ldots+k=\frac{k(k+1)}{2}.$$

Отже,

$$S_k = k \cdot \frac{k(k-1)}{2} + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{k(k^2+1)}{2}.$$

Приклад 2.13. *Знайти суму* $\frac{1^2}{1} + \frac{1^2+2^2}{2} + \frac{1^2+2^2+3^2}{3} + \ldots + \frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n}$.

Помічаємо, що чисельник k-го доданку є сумою квадратів k перших натуральних чисел. Розглянемо загальний член суми

$$a_k = \frac{1^2+2^2+\ldots+k^2}{k} = \frac{1}{k} \cdot \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} = \frac{2k^2+3k+1}{6} = \frac{k^2}{3} + \frac{k}{2} + \frac{1}{6}.$$

Після цього шукану суму перепишемо у вигляді

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \left(\frac{1^2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{2^2}{3} + \frac{2}{2} + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{3^2}{3} + \frac{3}{2} + \frac{1}{6}\right) + \ldots + \left(\frac{n^2}{3} + \frac{n}{2} + \frac{1}{6}\right).$$

Або, згрупувавши по відповідним степеня,

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{1}{3}\left(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2\right) + \frac{1}{2}\left(1 + 2 + \ldots + n\right) + n \cdot \frac{1}{6} =$$
$$= \frac{1}{3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n}{6} = \frac{n}{36}\left(4n^2 + 15n + 17\right).$$

Приклад 2.14. *(Кіровоградська олімпіада юних математиків, 1996 року, II тур, 10 клас) Знайти суму* $1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \ldots + 100 \cdot 2^{99}$.

В пункті 1.2 “Застосування диференціального та інтегрального числення до обчислення сум” ця задача була розв’язана в загальному випадку. Тут розглянемо інший спосіб, який запропонував Вороний О.М.[8], і дозволяє отримати відповідь навіть в середніх класах, де ще не вводилося поняття похідної.

Позначимо через S шукану суму та виконаємо наступні тотожні перетворення

$$S = 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \ldots + 100 \cdot 2^{99} = 1 + (1+1) \cdot 2 + (1+2) \cdot 2^2 + \ldots + (1+99) \cdot 2^{99} =$$
$$= \left(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{99}\right) + 2\left(1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \ldots + 99 \cdot 2^{98}\right) = 2^{100} - 1 + 2\left(S - 100 \cdot 2^{99}\right).$$

Таким чином, ми прийшли до рівняння

$$S = 2^{100} - 1 + 2\left(S - 100 \cdot 2^{99}\right),$$

з якого знаходимо

$$S = 99 \cdot 2^{100} + 1.$$

Описаний підхід зведення суми до відомих сум може бути з успіхом використаний при розв'язанні інших типів вправ.

Розглянуті задачі з підсумовування демонструють їх різноплановість та багатогранність. Тому ми ставимо перед вчителем єдину мету – вчити логічно мислити, не догматувати знання і завжди залишати місце власним учнівським думкам, адже в математиці, як в житті, до цілі можна йти різними шляхами, а досягти одного.

Зробимо підсумок глави.

В цій главі описано штучні методи обчислення скінченних сум, які базуються на супутньому математичному апараті, що дозволяє органічно поєднати пропонований матеріал із шкільною програмою. В той же час, залучення звичних для учнів і студентів засобів до нетипових завдань, розкриває глибокий зміст та широке застосування матеріалу, що вивчається. Окрім того, методи, що передбачають виконання штучних перетворень, є необхідними і достатніми засобами при розв'язанні олімпіадних задач.

Звичайно, описані випадки підсумовування не є вичерпними, але вони максимально наближені до реаліїв сьогодення математичної освіти.

В наступних главах розділу буде розглянута теорія, що дозволить поставити задачу з підсумовування на більш міцну теоретичну основу, вироблено загальні методи обчислення деяких класів сум. Це, в свою чергу, вимагатиме додаткової підготовки й часу на опанування. Тому наступні глави, в основному, розраховані на студентів та вчителів-новаторів, що можуть використати запропонований матеріал на факультативах та при роботі з обдарованими дітьми.

Вправи для самостійного розв'язування.

До пункту 1.1. Методи, що базуються на властивостях сум.

1. Обчислити $1^3+2^3+\ldots+n^3$.

2. Знайти дослідним шляхом значення суми $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}$ та довести припущення методом математичної індукції.

3. Користуючись методом зведення, знайти суму геометричної прогресії $1+q+q^2+\ldots+q^n$ при $|q|>1$.

4. Довести, що $\frac{1}{2}C_n^1-\frac{1}{3}C_n^2+\frac{1}{4}C_n^3-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n+1}C_n^n=\frac{n}{n+1}$.

До пункту 1.2. Застосування диференціального та інтегрального числення до обчислення сум.

1. Обчислити $\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx$.

2. Знайти $C_n^0+2\cdot3C_n^1+3\cdot3^2C_n^2+\ldots+(n+1)\cdot3^nC_n^n$.

3. Спростити $1\cdot2+2\cdot3x+3\cdot4x^2+\ldots+n\cdot(n+1)x^{n-1}$ для $x\neq1$.

4. Обчислити $\sin x+2\sin 2x+\ldots+n\sin nx$.

5. Виразити в замкненому вигляді суму $x+2^2x^2+3^2x^3+\ldots+n^2x^n$.

До пункту 1.3. Методи, що допускають геометричну інтерпретацію.

1. Побудувати геометричну інтерпретацію суми квадратів перших n натуральних чисел, використовуючи гномони.

2. Знайти геометричну інтерпретацію для суми $1^4+2^4+\ldots+n^4$.

До пункту 1.4. Зведення шуканої суми до відомих сум.

1. Знайти значення виразу $1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+999^2-1000^2$.

2. (Київська олімпіада з математики 1951 року, 10 клас) Знайти суму $S=\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_2}+\ldots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}$, якщо числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ утворюють арифметичну прогресію.

3. (Київська олімпіада з математики 1951 року, 11 клас) Дана послідовність непарних чисел 1, 3, 5, 7, 9, 11, ... Об'єднаємо їх в групи так, щоб в першу групу входило число 1, в другу - 3 і 5, в третю - 7, 9, 11 і т.д. Довести, що сума чисел, які входять в n-ну групу, рівна n^3. Вивести на основі цього формулу для суми $1^3+2^3+\ldots+n^3$.

2. Суми та рекурентні послідовності

Нехай задано деяку послідовність чисел a_1, a_2, …, a_n. Знайдемо суму

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n. \qquad (*)$$

Для цього до a_1 спочатку додамо a_2, потім до утвореної суми додамо a_3 і т.д. Таким чином, обчислення суми (*) зводиться до наступних міркувань:

$$\begin{aligned}
&S_1 = a_1;\\
&S_2 = a_1 + a_2 = S_1 + a_2;\\
&S_3 = (a_1 + a_2) + a_3 = S_2 + a_3;\\
&S_4 = (a_1 + a_2 + a_3) + a_4 = S_3 + a_4;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&S_k = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}) + a_k = S_{k-1} + a_k;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&S_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}) + a_n = S_{n-1} + a_n.
\end{aligned}$$

На кожному кроці S_k визначається через S_{k-1}. В цьому випадку говорять про рекурентно задану послідовність.

Означення. Послідовність називається заданою рекурентно, якщо кожний наступний її член виражається через попередні члени послідовності.

Отже, ми з'ясували, що сума

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

еквівалентна рекурентності

$$\begin{cases} S_1 = a_1, \\ S_k = S_{k-1} + a_k, \quad k > 0 \end{cases} \qquad (**)$$

і поставлена у вступові задача з підсумовування звелася до розв'язання рекурентного співвідношення (**).

Наприклад, для геометричного ряду можна побудувати 2 види рекурентних співвідношень:

а)

$$\begin{cases} S_1 = a, \\ S_k = S_{k-1} + aq^{k-1} \end{cases}$$

б)

$$\begin{cases} S_1 = a, \\ S_2 = aq, \\ S_{k+2} = (1+q)S_{k+1} - qS_k \end{cases}$$

Неважко помітити, що перша рекурентність містить в ролі параметра номер деякого елемента суми - k, друга рекурентність – його немає. Ця ознака примушує нас розглянути два методи розв'язання рекурентних рівнянь: репертуарний (випадок а) і метод, що базується на теорії різницевих рівнянь (випадок б).

Репертуарний метод. Частіше всього використовується у випадках, коли сума породжена многочленом степені не вище 5-го, та зводить рекурентне співвідношення до методу невизначених коефіцієнтів.

Нехай a_k - загальний член суми, що рівний сталій плюс деяке кратне k. Тоді система (**) прийме вигляд:

$$\begin{cases} S_0 = \alpha, \\ S_k = S_{k-1} + \beta + \gamma k, \quad k > 0 \end{cases} \qquad (***)$$

Загальний розв'язок рекурентності (***) виражається формулою:

$$S_n = A(n)\alpha + B(n)\beta + C(n)\gamma,$$

де $A(n),\ B(n),\ C(n)$ - невизначені коефіцієнти. Знайдемо їх.

Підстановка $S_n = 1$ дає $\alpha = 1,\ \beta = 0,\ \gamma = 0 \Rightarrow A(n) = 1$.

Підстановка $S_n = n$ дає $\alpha = 0,\ \beta = 1,\ \gamma = 0 \Rightarrow B(n) = n$.

Підстановка $S_n = n^2$ дає $\alpha = 0,\ \beta = -1,\ \gamma = 2 \Rightarrow C(n) = \frac{n^2 + n}{2}$.

Приклад 2.15. *Знайти суму* $\sum_{k=0}^{n}(a + bk)$, *використовуючи репертуарний метод.*

Система (***) в даному випадку запишеться так:

$$\begin{cases} S_0 = a, \\ S_k = S_{k-1} + a + bk. \end{cases}$$

Отже, $\alpha = a$, $\beta = a$, $\gamma = b$.

Врахувавши значення коефіцієнтів $A(n),\ B(n),\ C(n)$ запишемо значення шуканої суми.

$$A(n)\cdot a + B(n)\cdot a + C(n)\cdot b = a + na + \frac{n^2 + n}{2}b = \frac{(n+1)(2a + nb)}{2}.$$

Приклад 2.16. *Виразити за допомогою репертуару* $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^2$ *в замкненому вигляді.*

Аналізуючи вправу, підмічаємо суттєвий недолік репертуарного методу – його не універсальність, оскільки рекурентність (***) в розглядуваному випадку вимагає суттєвих доповнень, а саме:

$$\begin{cases} S_0 = \alpha, \\ S_k = S_{k-1} + (-1)^k\left(\beta + \gamma k + \delta k^2\right), \quad \text{при} \quad k > 0 \end{cases}$$

і загальний розв'язок

$S_n = A(n)\alpha + B(n)\beta + C(n)\gamma + D(n)\delta$,

де $A(n)$, $B(n)$, $C(n)$, $D(n)$ - невизначені коефіцієнти.

Обчислимо їх значення, використовуючи допоміжні підстановки

$$S_n = 1 \ \Rightarrow \ A(n) = 1;$$

$$S_n = (-1)^n \ \Rightarrow \ A(n) + 2B(n) = (-1)^n;$$

$$S_n = (-1)^n n \ \Rightarrow \ -B(n) + 2C(n) = (-1)^n n;$$

$$S_n = (-1)^n n^2 \ \Rightarrow \ B(n) - 2C(n) + 2D(n) = (-1)^n n^2.$$

Отже, $D(n) = (-1)^n \dfrac{n^2 + n}{2}$ і є шуканою сумою.

Таким чином, розглянувши застосування репертуарного методу до розв'язування задач з підсумовування, можна зробити наступний *висновок*: творчий підхід при побудові рекурентності та необхідність глибокого аналізу при обчисленні невизначених коефіцієнтів, дозволяє використовувати репертуар при роботі з обдарованими учнями та студентами.

В той же час постає питання: чи не можна якимось чином узагальнити репертуарний метод так, щоб він міг бути застосований до широкого класу сум. Відповідь на це запитання дає наступна теорема [20].

Теорема. Нехай дано послідовність $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ Якщо існує натуральне k і числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ такі, що

$$a_{n+k} = \alpha_1 a_{n+k-1} + \alpha_2 a_{n+k-2} + \ldots + \alpha_k a_n \quad (n \geq k \geq 1), \tag{1}$$

то

$$S_{n+k} = (1+\alpha_1) S_{n+k} + (\alpha_2 - \alpha_1) S_{n+k-1} + \ldots + (\alpha_k - \alpha_{k-1}) S_{n+1} - \alpha_k S_n, \tag{2}$$

де $S_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_i$.

Доведення.

Побудуємо n - часткові суми:

$$S_1 = a_1,$$
$$S_2 = a_1 + a_2,$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n.$$

Неважко помітити, що

$$a_1 = S_1,$$
$$a_2 = S_2 - a_1 = S_2 - S_1,$$
$$a_3 = S_3 - (a_1 + a_2) = S_3 - S_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_n = S_n - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = S_n - S_{n-1}.$$

Підставимо у рівність (1) отримані значення членів послідовності (a_n).

$$S_{n+k} - S_{n+k-1} = \alpha_1 (S_{n+k-1} - S_{n+k-2}) + \alpha_2 (S_{n+k-2} - S_{n+k-3}) + \ldots + \alpha_k (S_n - S_{n-1}),$$

звідки

$$S_{n+k} = (1+\alpha_1) S_{n+k-1} + (\alpha_2 - \alpha_1) S_{n+k-2} + \ldots + (\alpha_k - \alpha_{k-1}) S_n + (\alpha_{k+1} - \alpha_k) S_{n-1}, \text{ де } \alpha_{k+1} = 0.$$

Замінивши n на $(n+1)$ отримуємо рівність (2).

Теорему доведено.

Отже, теорема говорить, що коли послідовність (a_n) може бути задана рекурентно (рівність 1), то послідовність n- часткових сум задовольняє рекурентне рівняння (2), яке не містить членів послідовності в явному вигляді.

Розв'язанням таких рівнянь[1] займається теорія скінченних різниць, яка буде висвітлена в наступній главі розділу.

На теперішньому етапі нашою задачею буде усвідомлення можливості зведення суми до рекурентного рівняння k-го порядку (порядок рекурентного рівняння дорівнює кількості членів послідовності, через які виражається кожний наступний її член) та вироблення навичків з цього питання.

Приклад 2.17. *Побудувати рекурентні рівняння (1) та (2) для*

a) *арифметичної прогресії;*
b) *геометричної прогресії;*
c) *послідовності квадратів натуральних чисел;*
d) *послідовності чисел Фібоначчі;*
e) *послідовності* (a_n), *де* $a_n = na^n$, $a \neq 0$, $a \neq 1$.

<u>Арифметична прогресія.</u>

За означенням арифметичної прогресії $a_{n+1} = a_n + d$, де d - різниця прогресії. Зведемо це рівняння до типу (1). Для цього достатньо розглянути систему двох рекурентних рівнянь

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + d, \\ a_{n+2} = a_{n+1} + d, \end{cases}$$

з якої знаходимо

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n\,. \qquad (1')$$

Тобто, $\alpha_1 = 2$; $\alpha_2 = -1$; $\alpha_3 = 0$, а $(1')$ – рекурентне рівняння 2-го порядку.

Визначивши α_1 та α_2, запишемо рекурентне рівняння для суми членів арифметичної прогресії.

$$S_{n+3} = 2S_{n+2} - 3S_{n+1} + S_n \qquad (2')$$

Геометрична прогресія.

Очевидно, що $a_{n+1} = a_n q$. Звідси $\alpha_1 = q$, $\alpha_2 = 0$. Підставляючи отримані значення коефіцієнтів в рівність (2) отримаємо

$$S_{n+2} = (1+q)S_{n+1} - qS_n$$

рекурентне рівняння другого порядку для суми геометричного ряду.

Послідовність квадратів натуральних чисел.

Розглядається послідовність (a_n), де $a_n = n^2$.

Запишемо систему рекурентних рівнянь

$$\begin{cases} a_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 = a_n + 2n + 1, \\ a_{n+2} = (n+2)^2 = ((n+1)+1)^2 = (n+1)^2 + 2n + 3 = a_{n+1} + 2n + 3 = a_{n+1} + 2n + 3. \end{cases}$$

Або

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2n + 1, \\ a_{n+2} = a_{n+1} + 2n + 3. \end{cases}$$

Звідки

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2\,.$$

Але це ще не рівняння, подібне (1). Тому запишемо

$$a_{n+3} = 2a_{n+2} - a_{n+1} + 2\,.$$

Віднявши почленно останні дві рівності матимемо

$$a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n\,.$$

Очевидно, що

$$\alpha_1 = 3;\ \alpha_2 = -3;\ \alpha_3 = 1;\ \alpha_4 = 0\,.$$

На основі цього запишемо рекурентне рівняння для сум

$$S_{n+4} = (1+\alpha_1)S_{n+3} + (\alpha_2 - \alpha_1)S_{n+2} + (\alpha_3 - \alpha_2)S_{n+1} + (\alpha_4 - \alpha_3)S_n\,,$$

Або $S_{n+4} = 4S_{n+3} - 6S_{n+2} - 4S_{n+1} - S_n$ - рекурентне рівняння 4-го порядку.

---

[1] Інколи рекурентні рівняння називаються зворотними рівняннями.

<u>Послідовність кубів натуральних чисел *(Самостійно)*.</u>

Відповідь.

$$a_n = n^3$$
$$a_{n+1} = (n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = a_n + 3n^2 + 3n + 1$$
$$a_{n+2} = ((n+1)+1)^3 = (n+1)^3 + 3(n+1)^2 + 3(n+1) + 1 = a_{n+1} + 3n^2 + 9n + 7$$
$$a_{n+3} = ((n+2)+1)^3 = (n+2)^3 + 3(n+2)^2 + 3(n+2) + 1 = a_{n+2} + 3n^2 + 15n + 19$$

$$a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n + 6n + 6$$
$$a_{n+3} - a_{n+2} = a_{n+2} - a_{n+1} + 6n + 12$$

З останніх рівностей випливає, що

$$a_{n+3} - a_{n+2} = 2a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n + 6.$$

Або $a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n + 6$.

Тоді $a_{n+4} = 3a_{n+3} - 3a_{n+2} + a_{n+1} + 6$.

Отже, $a_{n+4} = 4a_{n+3} - 6a_{n+2} + 4a_{n+1} - a_n$ - рекурентне рівняння 4-го порядку для послідовності кубів натуральних чисел.

Звідси $S_{n+5} = 5S_{n+4} - 10S_{n+3} + 10S_{n+2} - 5S_{n+1} + S_n$.

Перевірка (Виконати самостійно).

<u>Послідовність чисел Фібоначчі.</u>

Послідовністю Фібоначчі (F_n) називається послідовність, кожен наступний член якої рівний сумі двох попередніх, причому $F_0 = 0$, $F_1 = 1$. Таким чином, (F_n) має вигляд:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 56, ...

З означення випливає рекурентність

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Отже, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 0$.

Тоді часткові суми послідовності чисел Фібоначчі задовольняють наступне рекурентне рівняння 3-го порядку

$$S_{n+3} = 2S_{n+2} - S_n.$$

Перед нами не стоїть задача вивчити властивості чисел Фібоначчі, але все ж зазначимо, що вони мають дуже широке застосування як в дискретній математиці так і в інформатиці. Гідна уваги розроблена вченими фібоначієва система числення, яка спрощує обрахунки в багатьох задачах. Сам же історичний шлях розвитку послідовності Фібоначчі може бути з успіхом використаний для зацікавлення учнів при вивченні теми “Послідовності” та познайомлення їх з більш складною задачею, ніж арифметична та геометрична прогресії. В той же час проста побудова чисел Фібоначчі та глибокий таємний смисл, що прихований в них може стати об'єктом серйозних досліджень студентською молоддю. В будь-якому випадку кожен "справжній" вчитель повинен досконало знати не лише шкільний матеріал, а й деякі додаткові питання, якими можна здивувати, зацікавити чи озадачити учнів.

Послідовність a, $2a^2$, $3a^3$,…, na^n, де a – стала.

Аналогічними міркуваннями можна показати, що $u_{n+2} = 2au_{n+1} - a^2u_n$; $\alpha_1 = 2a$, $\alpha_2 = -a^2$, $\alpha_3 = 0$. Відповідно:

$$S_{n+3} = (1+2a)S_{n+2} - (a^2+2a)S_{n+1} + a^2S_n .$$

Виявляється, що з рівняння типу (2) можна виразити S_n в замкненому вигляді. В подальшому, розглядаючи різницеві рівняння, ми розв'яжемо кілька з отриманих рекурентних рівнянь та зіставимо розв'язок з результатами, які були отримані іншими шляхами.

Зауваження. Рівняння (1) та (2) не враховують початкових умов конкретної послідовності. Тому при побудові загального розв'язку виникатиме необхідність уточнення отриманого результату.

Вправи для самостійного розв'язування.

1. Побудувати рекурентність (**) для наступних сум:

а) $\sum_{k=1}^{n} 2^{-k}$ б) $\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k}+3k\right)$

2. Використовуючи репертуарний метод знайти суми:

а) $\sum_{k=0}^{n} k$ б) $\sum_{k=0}^{n} k^2$

3. Записати до поданих послідовностей рівняння (1) та (2).

а) $\sum_{k=0}^{n} k$ б) $\sum_{k=0}^{n} k^2$

4. Побудувати рекурентні рівняння (1) та (2) для наступних послідовностей.

1) Послідовність, кожен наступний член якої рівний сумі трьох попередніх;
2) Послідовність, кожен наступний член якої рівний різниці двох попередніх;
3) Послідовність (a_n), де $a_n = 2a_{n-1} + 5a_{n-2} + 1$.

3. Метод скінченних різниць

Приклад 2.18. *(Всеукраїнська студентська олімпіада, м. Вінниця, 2000 рік).*

Довести, що число $\sum_{k=1}^{2001} k!\cdot\left(k^2+k+1\right)$ *не має дільників менших за 2002.*

Краєугольним моментом в розв'язанні поставленої проблеми є вираження числа, представленого у вигляді суми, в скінченному вигляді.

Виконуючи певні тотожні перетворення над загальним членом суми, приходимо до цікавого результату:

$$a_k = k!\left(k^2+k+1\right) = k!\left((k+1)^2-k\right) = (k+1)!(k+1) - k!k .$$

Таким чином

$$\sum_{k=1}^{2001} k!\cdot\left(k^2+k+1\right) = \sum_{k=1}^{2001}\left[(k+1)!(k+1)-k!k\right] = (2!\cdot 2-1!\cdot 1)+(3!\cdot 3-2!\cdot 2)+(4!\cdot 4-3!\cdot 3)+$$
$$+(5!\cdot 5-4!\cdot 4)+\ldots+(2001!\cdot 2001-2000!\cdot 2000)+(2002!\cdot 2002-2001!\cdot 2001) = 2002!\cdot 2002-1$$

Отже,

$$\sum_{k=1}^{2001} k!\cdot\left(k^2+k+1\right) = 2002!\cdot 2002-1 .$$

Проаналізуємо. До даної послідовності чисел (a_k) побудовано іншу послідовність (b_k), де $\mathrm{b}_\mathrm{k} = \mathrm{k}!\cdot\mathrm{k}$ таку, що $\mathrm{a}_\mathrm{k} = \mathrm{b}_{\mathrm{k}+1} - \mathrm{b}_\mathrm{k}$. Тоді

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}\left(b_{k+1}-b_k\right) = b_{n+1}-b_1 .$$

Цей прийом покладено в основу підсумовування методом скінченних різниць. Але, перш ніж перейти до знаходження сум коротко розглянемо деякі теоретичні відомості з цього питання.

3.1. Різницеве числення

Нехай функція $\mathrm{f}(x)$ визначена в точці x і нехай h таке число, що $\mathrm{f}(x)$ визначена і в точці $x+h$.

Означення. Операція переходу від $\mathrm{f}(x)$ до $\mathrm{f}(x+\mathrm{h})-\mathrm{f}(x)$ називається оператором знаходження різниці, або різницевим оператором і позначається

$$\Delta_h f = f(x+h)-f(x).$$

Не втрачаючи загальності, покладемо $h=1$. Справді, замінюючи $\mathrm{f}(x)$ на $\mathrm{g}(\mathrm{t})$, де $\mathrm{g}(\mathrm{t}) = \mathrm{f}(\mathrm{h}x)$, $\mathrm{t} = \dfrac{x}{\mathrm{h}}$, отримуємо

$$\Delta g = g(t+1) - g(t) = f(h(t+1)) - f(ht) = f\left(h\left(\frac{x}{h}+1\right)\right) - f\left(h\frac{x}{h}\right) = f(x+h) - f(x) = \Delta_h f .$$

Тоді різницевий оператор визначиться наступним чином

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x). \qquad (1)$$

Властивості різницевого оператора.

1. Якщо c - стала, то $\Delta(cf) = c\Delta f$.
2. (Адитивність). Нехай функції f і g визначені в точках x та $x+1$. Тоді $\Delta(f+g) = \Delta f + \Delta g$.
3. (Лінійність). Якщо c_1, c_2 - сталі, а f і g визначені в точках x та $x+1$, то $\Delta(c_1 f + c_2 g) = c_1 \Delta f + c_2 \Delta g$.
4. (Аналог похідної добутку). $\Delta(f \cdot g) = g \cdot \Delta f + f \cdot \Delta g + \Delta f \cdot \Delta g$.

Доведення. За означенням

$$\Delta(f \cdot g) = f(x+1)g(x+1) - f(x)g(x) = f(x+1)g(x+1) - f(x)g(x) + f(x+1)g(x) - f(x+1)g(x) =$$
$$= f(x+1)(g(x+1) - g(x)) + g(x)(f(x+1) - f(x)) = f(x+1)\Delta g + g(x)\Delta f = f(x+1)\Delta g - f(x)\Delta g +$$
$$+ f(x)\Delta g + g(x)\Delta f = \Delta g(f(x+1) - f(x)) + f(x)\Delta g + g(x)\Delta f = f(x)\Delta g + g(x)\Delta f + \Delta g \Delta f.$$

Властивість доведено.

Неважко помітити, що різницевий оператор є аналогом похідної при $\Delta x = 1$ (приріст аргументу), а операція знаходження різниці – аналог диференціювання. Постає питання: “а що виступає в ролі оберненої операції – інтегрування ?”

Означення. Антирізницею функції $\mathrm{f}(x)$ називається така функція $\mathrm{F}(x)$, що $\Delta \mathrm{F}(x) = \mathrm{f}(x)$ (2) і позначається

$$\Delta^{-1} f(x) = F(x) \qquad (3)$$

Властивості антирізницевого оператора.

1. $\Delta^{-1}(\Delta f(x)) = f(x)$.
2. Якщо $\mathrm{F_1(x)}$ і $\mathrm{F_2(x)}$ дві різні антирізниці функції $\mathrm{f(x)}$, то
$$F_1(x) = F_2(x) + \varphi(x),$$
де $\varphi(x)$ - довільна періодична з періодом $T = 1$ функція.

Наприклад,

I. Різниці.

1) $\Delta(ax+b) = [a(x+1)+b] - [ax+b] = a$;

2) $\Delta x^2 = (x+1)^2 - x^2 = 2x+1$;

3) $\Delta x^{(k)} = kx^{(k-1)}$, де

$$\left.\begin{aligned} &x^{(k)} = x(x-1)(x-2)\ldots(x-k+1) \\ &x^{(-k)} = \frac{1}{x(x+1)(x+2)\cdot\ldots\cdot(x+k-1)} \end{aligned}\right\} \text{узагальнений степінь, } k \in N;$$

4) $\Delta a^x = a^{x+1} - a^x = (a-1)a^x$;

При $a = 2$ $\Delta 2^x = 2^x$ - аналог експоненціальної функції;

5) $\Delta \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x} = -\dfrac{1}{x(x+1)}$;

6) $\Delta arctgx = arctg \dfrac{1}{1+x(x+1)}$;

7) $\Delta \sin(\alpha x) = 2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\left(\alpha x + \dfrac{\alpha}{2}\right)$;

8) $\Delta tg(\alpha x) = \dfrac{\sin\alpha}{\cos(\alpha x)\cos(\alpha x+\alpha)}$, або $\dfrac{1}{\cos(\alpha x)\cos(\alpha x+\alpha)} = \Delta\dfrac{tg(\alpha x)}{\sin\alpha}$.

II. Антирізниці.

1) $\Delta^{-1} a^x = \dfrac{a^x}{a-1}$;

2) $\Delta^{-1} x^{(k)} = \dfrac{x^{(k+1)}}{k+1}$;

3) $\Delta^{-1}\cos\alpha x = \dfrac{\sin\left(x - \dfrac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}$;

4) $\Delta^{-1}\dfrac{1}{\cos\alpha x\cos\alpha(x+1)} = \dfrac{tg\alpha x}{\sin\alpha}$;

5) $\Delta^{-1} arctg\dfrac{1}{1+x+x^2} = arctgx$.

Тепер, освоївши новий математичний апарат, повернемося до задачі обчислення скінченних сум.

Нехай в рівності (2) x послідовно рівний $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots,\ (n-1)$. Отримуємо систему

$$\begin{cases} F(2)-F(1)=f(1), \\ F(3)-F(2)=f(2), \\ F(4)-F(3)=f(3), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F(n)-F(n-1)=f(n-1), \end{cases}$$

з якої знаходимо:

$$f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n-1)=F(n)-F(1). \qquad (4)$$

В тому випадкові, коли обидві функції $f(x)$ і $F(x)$ відомі, формула (4) може служити для обчислення сум:

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(x+k)=f(x)+f(x+1)+\ldots+f(x+n-1)=F(x+n)-F(x),$$

або, за аналогією формули Ньютона-Лейбніца:

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(x+k)=F(x+k)\Big|_0^n=F(x+n)-F(x).$$

На практиці частіше використовується випадок, коли $x=0$. В цьому випадку маємо:

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k)=F(k)\Big|_0^n=F(n)-F(0) \qquad (5)$$

Приклад 2.19. *(Київська олімпіада 11 клас, 1961 р.) Знайти суму* n *доданків*

$$arctg\frac{1}{1+1+1^2}+arctg\frac{1}{1+2+2^2}+\ldots+arctg\frac{1}{1+n+n^2}.$$

Згідно формули (5)

$$\sum_{k=1}^{n} arctg\frac{1}{1+k+k^2}=\Delta^{-1}arctg\frac{1}{1+k+k^2}\Bigg|_1^{n+1}=arctgk\Big|_1^{n+1}=arctg(n+1)-arctg1=arctg(n+1)-\frac{\pi}{4}.$$

Підсумок. Можна з впевненістю сказати, що задача на знаходження суми, породженої деякою функцією $\mathrm{f}(x)$, розв'язана повністю. Треба знайти антирізницю $\Delta^{-1}\mathrm{f}(x)$ і скористатися формулою (5). В той же час не для будь-якої, навіть елементарної, функції, її антирізниця виражається через елементарні функції, наприклад для $\mathrm{f}(x)=\frac{1}{x}$.

В цьому випадку розглядають або задачу наближеного обчислення сум, або шукають певні нестандартні шляхи. Тому наступний пункт глави буде присвячено аналізу таких типів функцій, антрирізниця яких виражається в скінченному вигляді. Особливий інтерес серед них викликають суми, породжені многочленами, квазімногочленами і узагальненим степенем.

Зауваження. Інколи загальний член суми вдається представити не як різницю двох сусідніх членів деякої послідовності, а як різницю

$$a_k = b_{k+m} - b_k \text{, де } \mathrm{m} \in \mathrm{Z}.$$

Тоді ми рекомендуємо виписати відповідну суму в розгорнутому вигляді та виконати відповідні тотожні перетворення.

Приклад 2.20. *(Університет Дружби Народів, олімпіада з математики, 1977 р.)*

Знайти границю

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3+3k^2+11k+5}{(k+3)!}.$$

Представимо дріб у вигляді суми елементарних дробів.

$$\frac{k^3+3k^2+11k+5}{(k+3)!} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{(k+3)!} - \frac{1}{(k+3)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+3)!}.$$

Отже,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3+3k^2+11k+5}{(k+3)!} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+3)!}\right) = 1-\frac{1}{4!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{6!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{7!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{8!}+\ldots+$$

$$+\frac{1}{(n-2)!}-\frac{1}{(n+11)!}+\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{(n+2)!}+\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+3)!} = 1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}-\frac{1}{(n+3)!}$$

Тепер задача знаходження границі при $n\to+\infty$ набуває тривіального характеру

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3+3k^2+11k+5}{(k+3)!} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}-\frac{1}{(n+3)!}\right) = 1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}.$$

В попередній главі ми відзначили, що обчислення деяких сум зводиться до розв'язування рекурентного рівняння $(k+1)$ -го порядку

$$S_{n+k+1} = (1+\alpha_1)S_{n+k} + (\alpha_2-\alpha_1)S_{n+k-1} + \ldots + (\alpha_k-\alpha_{k-1})S_{n+1} - \alpha_k S_n, \tag{6}$$

де α_1, α_2, …, α_k - дійсні числа.

Для розв'язування рівняння (6) скористаємося теорією *різницевих рівнянь*.

Нехай x приймає тільки натуральні значення. Тоді $\varphi(x)$ - це послідовність

$$\varphi(1),\ \varphi(2),\ \varphi(3), \ldots, \varphi(n), \ldots$$

Означення. Рівняння, яке можна записати у вигляді

$$\Delta\varphi(x) - g(x)\varphi(x) = 0 \tag{7}$$

відносно невідомої функції $\varphi(x)$ називається лінійним однорідним різницевим рівнянням першого порядку (ЛОРР).

Загальний розв'язок рівняння (7), приведений в [5], має вигляд

$$\varphi(x) = c\prod_{k=0}^{x-1}\left(g(k)+1\right), \text{ де } c \in R.$$

Але, оскільки рівняння (6) як правило другого і вище порядків, то ЛОРР (7) нас мало цікавитиме.

Означення. ЛОРР другого порядку називається рівняння виду

$$\Delta^2\varphi(x) + a\Delta\varphi(x) + b\varphi(x) = 0, \tag{8}$$

де $\Delta^n f$ - різниця n - го порядку функції f.

Загальний розв’язок цього рівняння запишеться у вигляді

$$\varphi(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x),$$

де $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ - деякі часткові лінійно незалежні розв’язки, тобто

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(0) & \varphi_1(1) \\ \varphi_2(0) & \varphi_2(1) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{*}$$

Сталі c_1, c_2 визначаються, як правило, з початкових умов задачі.

З огляду на рекурентність (6) рівняння (8) зручно записати у вигляді

$$\varphi(x+2) + p\varphi(x+1) + q\varphi(x) = 0, \tag{9}$$

де $\mathrm{p} = \mathrm{a} - 2$, $\mathrm{q} = \mathrm{a} + \mathrm{b} + 1$.

Основна задача – знайти часткові розв’язки $\varphi_1(x)$ та $\varphi_2(x)$ рівняння (9).

Означення. Рівняння $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ (10) називається характеристичним рівнянням лінійного однорідного різницевого рівняння (9) другого порядку.

В залежності від того, якими є корені рівняння (10) *розглядають* наступні *випадки*:

1) λ_1, $\lambda_2 \in R$ і $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Очевидно, що умова (*) виконується і функція

$$\varphi(x) = c_1\lambda_1^x + c_2\lambda_2^x \tag{11}$$

загальний розв’язок рівняння (9).

2) λ_1, $\lambda_2 \in R$ і $\lambda_1 = \lambda_2$ В цьому випадку лінійно незалежними частковими розв’язками рівняння (9) будуть функції $\varphi_1(x) = x\lambda^x$ та $\varphi_2(x) = \lambda^x$. Тоді загальний розв’язок прийме вигляд:

$$\varphi(x) = c_1x\lambda_1^x + c_2\lambda_2^x. \tag{12}$$

3) λ_1, λ_2 - комплексні. Запишемо загальний розв’язок, що відповідає розглядуваному випадкові.

$$\varphi(x) = \rho^x\left(c_1\cos\alpha x + c_2\sin\alpha x\right), \tag{13}$$

де ρ - модуль, α - аргумент одного з комплексних коренів характеристичного рівняння (10).

Детальніше з цим матеріалом можна познайомитися в [5, 12, 19].

Але вже елементарні вправи (див. главу 2) показують, що обмежитися лише різницевими рівняннями 2-го порядку ми не можемо, а тому виникає потреба в узагальнені отриманих результатів. Оскільки теорія різницевих рівнянь нас цікавить лише як засіб знаходження скінченних сум, то скористаємося відомими фактами та наслідками.

Означення. Лінійним однорідним різницевим рівнянням k-го порядку з сталими коефіцієнтами називається рівняння виду

$$\varphi(x+k)+a_1\varphi(x+k-1)+a_2\varphi(x+k-2)+\ldots+a_k\varphi(x)=0. \qquad (14)$$

Означення. Рівняння $\lambda^k+a_1\lambda^{k-1}+a_2\lambda^{k-2}+\ldots+a_{k-1}\lambda+a_k=0$ (15) називається характеристичним рівнянням ЛОРР (14).

Аналогічно ЛОРР другого порядку, розглянемо побудову загального розв'язку рівняння (14) в залежності від коренів характеристичного рівняння (15).

1) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\mathrm{k}} \in R$ і $\lambda_i \neq \lambda_{\mathrm{j}}$, якщо $i \neq j$.

$$\varphi(x)=c_1\lambda_1^x+c_2\lambda_2^x+\ldots+c_k\lambda_k^x \qquad (16)$$

2) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\mathrm{m}}$ - дійсні корені (15) кратності $s_1, s_2, \ldots, s_{\mathrm{m}}$ відповідно.

Тоді кореню λ_j відповідатиме сума $\left(c_1+c_2x+c_3x^2+\ldots+c_{s_j}x^{s_j-1}\right)\cdot\lambda_j^x$, а простому кореню відповідатиме доданок $c_i\lambda_i^x$. Таким чином

$$\varphi(x)=\left(c_{11}+c_{12}x+c_{13}x^2+\ldots+c_{1s_1}x^{s_1-1}\right)\cdot\lambda_1^x+\ldots+\left(c_{m1}+c_{m2}x+c_{m3}x^2+\ldots+c_{ms_1}x^{s_m-1}\right)\cdot\lambda_m^x \quad (17)$$

Аналогічно будують систему лінійно незалежних розв'язків і у випадку комплексних коренів.

Глибше розібратися в усіх нюансах теорії різницевих рівнянь можна в [11]

Отже, різницеві рівняння дозволяють виразити в скінченному вигляді функцію, яка задовольняє деяке рекурентне співвідношення. Оскільки нас цікавлять перш за все суми, то спробуємо розв'язати деякі з побудованих в попередній главі рекурентних співвідношень.

Приклад 2.21. *Знайти суми*

a) арифметичної прогресії $\mathrm{a}, \mathrm{a}+\mathrm{d}, \mathrm{a}+2\mathrm{d}, \ldots, \mathrm{a}+(\mathrm{n}-1)\mathrm{d}$*;*

b) геометричної прогресії $1, \mathrm{q}, \mathrm{q}^2, \mathrm{q}^3, \ldots, \mathrm{q}^{\mathrm{n}}$*;*

c) послідовності чисел Фібоначчі $0, 1, 1, 2, 3, 5, \ldots,$

якщо відомо, що вони (суми) задовольняють наступні рекурентні рівняння:

a) $S_{n+3} = 3S_{n+2} - 3S_{n+1} + S_n$; (*)

b) $S_{n+2} = (1+q)S_{n+1} - qS_n$; (**)

c) $S_{n+3} = 2S_{n+2} - S_n$. (***)

Розпочнемо з *геометричної прогресії*. Перепишемо рівняння (**) у вигляді

$$S_{n+2} - (1+q)S_{n+1} + qS_n = 0$$

Складемо характеристичне рівняння

$$\lambda^2 - (1+q)\lambda + q = 0,\ |q| > 1.$$

Звідси $\lambda_1 = q$, $\lambda_2 = 1$. Оскільки $\lambda_1 \neq \lambda_2$ при $|q| > 1$, то

$$S_n = c_1 q^n + c_2.$$

З початкових умов ($S_1 = 1, S_2 = 1+q$) випливає, що $c_1 = \dfrac{q}{q-1}$, $c_2 = \dfrac{1}{1-q}$.

Тоді

$$S_n = \frac{q^{n+1}}{q-1} + \frac{q}{q-1} = \frac{q^{n-1}-1}{q-1}.$$

Для *арифметичної прогресії* характеристичне рівняння має корені $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Тобто,

$$S_n = \left(c_1 + c_2 n + c_3 n^2\right)\cdot 1^n = c_1 + c_2 n + c_3 n^2.$$

Враховуючи, що

$$\begin{cases} S_1 = a, \\ S_2 = 2a + d, \\ S_3 = 3a + d \end{cases}$$

отримуємо значення сталих: $c_1 = 0$, $c_2 = a - \dfrac{1}{2}d$, $c_3 = \dfrac{d}{2}$.

$$S_n = \left(a - \frac{1}{2}d\right)n + \frac{1}{2}d\cdot n^2 = \frac{2a + (n-1)d}{2}\cdot n.$$

Суму чисел *послідовності Фібоначчі* пропонуємо знайти самостійно. Врахувати, що коренями характеристичного рівняння є числа 1, $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

3.2. Підсумовування методом скінченних різниць

Розглянута вище теорія дозволяє знайти загальні формули для сум, що породжені функціями, антирізниці яких виражаються в скінченному вигляді.

I. Нехай сума $\sum_{k=0}^{n-1} f(k)$ породжена многочленом

$$f(x) = b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + \ldots + b_1 x + b_0,$$

де $b_{m-1}, b_{m-2}, \ldots b_1, b_0 \in R$, $b_{m-1} \neq 0$.

Спираючись на матеріал попереднього пункту, маємо

$$\sum_{x=0}^{n-1}\left(b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + \ldots + b_1 x + b_0\right) = \Delta^{-1}\left(b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + \ldots + b_1 x + b_0\right)\Big|_0^n.$$

Таким чином ставиться задача відшукання антирізниці для многочлена $(m-1)$-го порядку. Для цього спочатку знайдемо

$$\Delta\left(a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0\right).$$

Проробивши кілька вправ подібного характеру при конкретних значеннях коефіцієнтів і степені многочлена, приходимо до висновку:

$$\Delta\left(a_m x^m + \ldots + a_1 x + a_0\right) = x^{m-1}C_m^1 a_m + x^{m-2}\left(C_m^2 a_m + C_{m-1}^1 a_{m-1}\right) + \ldots + x \cdot \sum_{i=2}^{m} C_i^{i-1} a_i + \sum_{i=1}^{m} C_i^i a_i, \qquad (1)$$

який можна довести методом математичної індукції по m.

Позначимо:

$$\begin{cases} b_{m-1} = C_m^1 a_m, \\ b_{m-2} = C_m^2 a_m + C_{m-1}^1 a_{m-1}, \\ b_{m-3} = C_m^3 a_m + C_{m-1}^2 a_{m-1} + C_{m-2}^1 a_{m-2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_1 = C_m^{m-1} a_m + C_{m-1}^{m-2} a_{m-1} + \ldots + C_2^1 a_2, \\ b_0 = C_m^m a_m + C_{m-1}^{m-1} a_{m-1} + \ldots + C_1^1 a_1. \end{cases} \qquad (2)$$

Тоді, згідно означення антирізниці

$$\Delta^{-1}\left(b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + \ldots + b_1 x + b_0\right) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

де $a_0 = \tau(x)$ - довільна періодична з періодом $T = 1$ функція.

З системи (2) m лінійних рівнянь з m невідомими, виразимо коефіцієнти $a_1, \ldots, a_n$, користуючись методом Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} C_m^1 & 0 & \dots & 0 \\ C_m^2 & C_{m-1}^1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_m^m & C_{m-1}^{m-1} & \dots & C_1^1 \end{vmatrix} = C_m^1 \cdot C_{m-1}^1 \cdot \ldots \cdot C_1^1 = m! \neq 0$$

Оскільки визначник основної матриці відмінний від нуля при будь-якому натуральному значенні m , то розв'язок існує і він єдиний.

$$\Delta_{a_m} = \begin{vmatrix} b_{m-1} & 0 & \dots & 0 \\ b_{m-2} & C_{m-1}^1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_0 & C_{m-1}^{m-1} & \dots & C_1^1 \end{vmatrix}; \quad \Delta_{a_{m-1}} = \begin{vmatrix} C_m^1 & b_{m-1} & \dots & 0 \\ C_m^2 & b_{m-2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_m^m & b_0 & \dots & C_1^1 \end{vmatrix}; \quad \dots \quad \Delta_{a_0} = \begin{vmatrix} C_m^1 & 0 & \dots & b_{m-1} \\ C_m^2 & C_{m-1}^1 & \dots & b_{m-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_m^m & C_{m-1}^{m-1} & \dots & b_0 \end{vmatrix}.$$

Тоді

$$\Delta^{-1}\left(b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + \ldots + b_1 x + b_0\right) = \frac{\Delta_{a_m}}{\Delta}x^m + \frac{\Delta_{a_{m-1}}}{\Delta}x^{m-1} + \ldots + \frac{\Delta_{a_1}}{\Delta}x + \tau(x)$$

Отже,

$$\sum_{x=0}^{n-1}\left(b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + \ldots + b_1 x + b_0\right) = \frac{1}{\Delta}\left(\Delta_{a_m}x^m + \Delta_{a_{m-1}}x^{m-1} + \ldots + \Delta_{a_1}x\right)\Big|_0^n. \qquad (3)$$

Приклад 2.22. *Знайти суму* $\sum_{k=0}^{n-1}\left(k^3 + 2k^2 + 1\right)$.

В цьому випадку маємо: $b_0 = 1$; $b_1 = 0$, $b_2 = 2$, $m = 4$.

Отже,

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(k^3 + 2k^2 + 1\right) = \frac{1}{\Delta}\left(\Delta_{a_4}k^4 + \Delta_{a_3}k^3 + \Delta_{a_2}k^2 + \Delta_{a_1}k\right)\Big|_0^n, \text{ де}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} C_4^1 & 0 & 0 & 0 \\ C_4^2 & C_3^1 & 0 & 0 \\ C_4^3 & C_3^2 & C_2^1 & 0 \\ C_4^4 & C_3^3 & C_2^2 & C_1^1 \end{vmatrix} = 4!; \quad \Delta_{a_4} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & C_3^1 & 0 & 0 \\ 0 & C_3^2 & C_2^1 & 0 \\ 1 & C_3^3 & C_2^2 & C_1^1 \end{vmatrix} = 6; \quad \Delta_{a_3} = \begin{vmatrix} C_4^1 & 1 & 0 & 0 \\ C_4^2 & 2 & 0 & 0 \\ C_4^3 & 0 & C_2^1 & 0 \\ C_4^4 & 1 & C_2^2 & C_1^1 \end{vmatrix} = 4;$$

$$\Delta_{a_2} = \begin{vmatrix} C_4^1 & 0 & 1 & 0 \\ C_4^2 & C_3^1 & 2 & 0 \\ C_4^3 & C_3^2 & 0 & 0 \\ C_4^4 & C_3^3 & 1 & C_1^1 \end{vmatrix} = -18; \quad \Delta_{a_3} = \begin{vmatrix} C_4^1 & 0 & 0 & 1 \\ C_4^2 & C_3^1 & 0 & 2 \\ C_4^3 & C_3^2 & C_2^1 & 0 \\ C_4^4 & C_3^3 & C_2^2 & 1 \end{vmatrix} = 32.$$

Остаточно

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(k^3+2k^2+1\right)=\frac{1}{24}\left(6k^4+4k^3-18k^2+32k\right)\Big|_0^n=\frac{1}{24}\left(6n^4+4n^3-18n^2+32n\right).$$

Зауваження. В кожному конкретному випадку обчислення суми, породженої многочленом можна проводити користуючись безпосередньо методом невизначених коефіцієнтів. В той же час, при зростанні степені многочлена бажано застосовувати формулу (3).

Інший підхід пропонується в [19]. Якщо $\mathrm{f}(x)$ - деяка ціла функція m-го степені, то її можна подати у вигляді

$$f(x)=A_0+A_1x+A_2x(x-1)+\ldots+A_mx(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-m+1). \qquad (4)$$

Тоді, пригадуючи значення антирізниці для узагальненого степеня, запишемо:

$$\sum_{k=0}^{n-1}f(x)=A_0n+A_1\frac{n(n-1)}{2}+\ldots+A_m\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m)}{m+1}.$$

Коефіцієнти $\mathrm{A}_0,\mathrm{A}_1,\ldots,\mathrm{A}_\mathrm{m}$ є числами Стірлінга, застосування яких до знаходження сум буде описано в наступному пункті.

Наприклад,

$$x^3=x+3x(x-1)+x(x-1)(x-2) \text{ і тоді}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}k^3=\frac{n(n-1)}{2}+n(n-1)(n-2)+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4}=\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2.$$

II. Нехай сума $\sum\limits_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n}-1}\mathrm{f}(\mathrm{k})$ породжена квазімногочленом, тобто

$$\mathrm{f}(x)=\left(\mathrm{b_m}x^\mathrm{m}+\mathrm{b_{m-1}}x^{\mathrm{m}-1}+\ldots+\mathrm{b_1}x+\mathrm{b_0}\right)\cdot\lambda^x, \text{ де } \lambda>0,\ \lambda\neq1.$$

З лінійності різницевого оператора випливає, що різниця від квазімногочлена є квазімногочлен. Це дає змогу використати метод невизначених коефіцієнтів для знаходження антирізниці

$$\Delta^{-1}\left(\left(b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0\right)\cdot\lambda^x\right).$$

Приклад 2.23. *Знайти суму* $\sum\limits_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n}-1}\left(\mathrm{k}^2+1\right)\cdot2^\mathrm{k}$.

Слідуючи загальній схемі, запишемо

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(k^2+1\right)\cdot2^k=\Delta^{-1}\left(\left(k^2+1\right)\cdot2^k\right).$$

Оскільки антирізниця від квазімногочлена є квазімногочлен, то

$$\Delta^{-1}\left(\left(k^2+1\right)\cdot 2^k\right)=\left(ak^2+bk+c\right)\cdot 2^k,$$

де a, b, c - невизначені коефіцієнти.

За означенням антирізниці

$$\Delta\left(\left(ak^2+bk+c\right)\cdot 2^k\right)=\left(k^2+1\right)\cdot 2^k.$$

Знайдемо

$$\Delta\left(\left(ak^2+bk+c\right)\cdot 2^k\right)=2^k\cdot\left(ak^2+(4a+b)k+2a+2b+c\right).$$

З рівності многочленів

$$ak^2+(4a+b)k+2a+2b+c=k^2+1$$

визначаємо: $a=1$, $b=-4$, $c=7$.

Отже, $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left(k^2+1\right)\cdot 2^k=\Delta^{-1}\left(\left(k^2+1\right)\cdot 2^k\right)=\left(k^2-4k+7\right)\cdot 2^k\Big|_0^n=\left(n^2-4n+7\right)\cdot 2^n-7$.

Спробуємо узагальнити отриманий результат. З того, що

$$\Delta\left(\left(a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\ldots+a_1x+a_0\right)\cdot\lambda^x\right)=\lambda^x\cdot\left(C_m^0 a_m(\lambda-1)x^m+\left(C_m^1\lambda a_m+C_{m-1}^0 a_{m-1}(\lambda-1)\right)x^{m-1}+\right.$$
$$+\left(C_m^2\lambda a_m+C_{m-1}^1\lambda a_{m-1}+C_{m-2}^0 a_{m-2}(\lambda-1)\right)x^{m-2}+\ldots+\left(C_m^{m-1}\lambda a_m+C_{m-1}^{m-2}\lambda a_{m-1}+\ldots+C_1^0 a_1(\lambda-1)\right)x+$$
$$\left.+C_m^m\lambda a_m+C_{m-1}^{m-1}\lambda a_{m-1}+\ldots+C_1^1\lambda a_1+C_0^0 a_0(\lambda-1)\right),$$

маємо

$$\Delta^{-1}\left(\left(b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0\right)\cdot\lambda^x\right)=\left(a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\ldots+a_1x+a_0\right)\cdot\lambda^x, \text{ де}$$

$$\begin{cases} b_m=C_m^0 a_m(\lambda-1),\\ b_{m-1}=C_m^1 a_m\lambda+C_{m-1}^0 a_{m-1}(\lambda-1),\\ b_{m-2}=C_m^2 a_m\lambda+C_{m-1}^1 a_{m-1}\lambda+C_{m-2}^0 a_{m-2}(\lambda-1),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ b_0=C_m^m a_m\lambda+C_{m-1}^{m-1}a_{m-1}\lambda+\ldots+C_1^1 a_1\lambda+C_0^0 a_0(\lambda-1). \end{cases}$$

Оскільки визначник основної матриці $\Delta=(\lambda-1)^{m+1}\neq 0$ при $\lambda\neq 1$, то розв'язок існує і єдиний. Тоді

$$\sum_{x=0}^{n-1}\left(b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0\right)\cdot\lambda^x=\frac{1}{\Delta}\left(\Delta_{a_m}x^m+\Delta_{a_{m-1}}x^{m-1}+\ldots+\Delta_{a_0}x\right)\cdot\lambda^x\Big|_0^n. \quad (5)$$

Приклад 2.24. *Обчислити* $\sum\limits_{k=0}^{9}\left(k^2+4k+3\right)\cdot 3^k$.

В цьому випадку $b_0=3$, $b_1=4$, $b_2=1$, $\lambda=3$. Згідно попередніх викладок маємо:

$$\Delta=\begin{vmatrix} C_2^0\cdot 2 & 0 & 0\\ C_2^1\cdot 3 & C_1^0\cdot 2 & 0\\ C_2^2\cdot 3 & C_1^1 2 & C_0^0\cdot 2\end{vmatrix}=2^3;\quad \Delta_{a_2}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0\\ 4 & C_1^0\cdot 2 & 0\\ 3 & C_1^1 2 & C_0^0\cdot 2\end{vmatrix}=4;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} C_2^0 \cdot 2 & 1 & 0 \\ C_2^1 \cdot 3 & 4 & 0 \\ C_2^2 \cdot 3 & 3 & C_0^0 \cdot 2 \end{vmatrix} = 4; \qquad \Delta = \begin{vmatrix} C_2^0 \cdot 2 & 0 & 1 \\ C_2^1 \cdot 3 & C_1^0 \cdot 2 & 4 \\ C_2^2 \cdot 3 & C_1^1 2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Тепер $\sum_{k=0}^{9}\left(k^2+4k+3\right)\cdot 3^k = \frac{3^k}{8}\left(4k^2+4k\right)\Big|_0^{10} = 3247695$.

III. Числу λ можна надавати і комплексні значення.

Таким чином можна вивести деякі вирази для сум

$$\sum_{x=0}^{n-1}\rho^x f(x)\cos\alpha x \quad \text{та} \quad \sum_{x=0}^{n-1}\rho^x f(x)\sin\alpha x,$$

де $\lambda = \rho e^{\alpha i}$, $f(x)$ - многочлен.

Легко пересвідчитися в тому, що функції

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \rho^x\left(\Phi_0(x)\cos\alpha x + \Phi_1(x)\sin\alpha x\right) \\ F_2(x) &= \rho^x\left(\Phi_0(x)\sin\alpha x - \Phi_1(x)\cos\alpha x\right) \end{aligned} \qquad (6)$$

задовольняють рівняння

$$\begin{aligned} \Delta F_1(x) &= \rho^x f(x)\cos\alpha x \\ \Delta F_2(x) &= \rho^x f(x)\sin\alpha x, \end{aligned} \qquad (7)$$

де $\Phi_0(x)$ і $\Phi_1(x)$ - многочлени того ж степені, що й $f(x)$. Для їх визначення вживають спосіб невизначених коефіцієнтів.

Підбираючи кожен раз функцію $f(x)$ та параметри ρ і α можна отримувати різноманітні суми, що містять тригонометричні вирази.

Приклад 2.25. *Знайти суми*

а) $1+\rho\cos\alpha+\rho^2\cos 2\alpha+\ldots+\rho^{n-1}\cos(n-1)\alpha$;

б) $\rho\sin\alpha+\rho^2\sin 2\alpha+\ldots+\rho^{n-1}\sin(n-1)\alpha$.

Покладемо в рівностях (6) і (7) $f(x)=1$. Тоді $\Phi_0(x)$ і $\Phi_1(x)$ - многочлени 1-го степені.

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \rho^x\left(A\cos\alpha x + B\sin\alpha x\right) \\ F_2(x) &= \rho^x\left(A\sin\alpha x - B\cos\alpha x\right). \end{aligned}$$

Звідси знаходимо $\Delta F_1(x)$ та $\Delta F_2(x)$. Прирівнюючи вирази (6) і (7) приходимо до системи:

$$\begin{cases} A(\rho\cos\alpha x - 1) + B\rho\sin\alpha x = 1, \\ B(\rho\cos\alpha x - 1) - A\rho\sin\alpha x = 0, \end{cases}$$

з якої виводимо

$$A = -\frac{1-\rho\cos\alpha}{1-2\rho\cos\alpha+\rho^2}; \quad B = -\frac{\rho\sin\alpha}{1-2\rho\cos\alpha+\rho^2}.$$

Отже,

$$1+\rho\cos\alpha+\rho^2\cos 2\alpha+\ldots+\rho^{n-1}\cos(n-1)\alpha=\frac{(1-\rho\cos\alpha)(1-\rho^n\cos^n\alpha)+\rho^{n+1}\sin\alpha\sin n\alpha}{1-2\rho\cos\alpha+\rho^2};$$

$$\rho\sin\alpha+\rho^2\sin 2\alpha+\ldots+\rho^{n-1}\sin(n-1)\alpha=\frac{\rho\sin\alpha(1-\rho^n\cos n\alpha)-(1-\rho\cos\alpha)\rho^n\sin n\alpha}{1-2\rho\cos\alpha+\rho^2}.$$

При $\rho=1$ отримуємо раніше обчислені суми.

Приклад 2.26. *(Самостійно) Знайти суми*

а) $\sum_{k=0}^{n-1} k\sin k\alpha$*;* *б)* $\sum_{k=0}^{n-1} k\cos k\alpha$.

Вказівка: Взяти $f(x)=x$. Тоді $\Phi_0(x)=Ax+B$, $\Phi_1(x)=Cx+D$.

IV. Досить просто виражається сума $\sum_{x=1}^{n-1} f(x)$, коли $f(x)=\dfrac{\varphi(x)}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+m)}$.

$\varphi(x)$ - многочлен степені не вище $(\mathrm{m}-1)$-го. В противному разі, виділивши цілу частину, знову приходимо до поставленої задачі.

Оскільки

$$\Delta^{-1}\frac{1}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+m)}=\Delta^{-1}x^{(-m)}=\frac{x^{(-m+1)}}{-m+1},\ \text{то}$$

$$\sum_{x=1}^{n-1}\frac{1}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+m)}=\left.\frac{x^{(-m+1)}}{-m+1}\right|_1^n=\frac{1}{-m+1}\left(\frac{1}{n(n+1)\cdot\ldots\cdot(n+m-1)}-\frac{1}{(m-1)!}\right). \quad (8)$$

З іншого боку $\varphi(x)$ можна представити у вигляді

$$\varphi(x)=A_0+A_1(x+m)+A_2(x+m)(x+m-1)+\ldots+A_{m-1}(x+m)(x+m-1)\cdot\ldots\cdot(x+2).$$

Тоді, за властивістю адитивності сум

$$\sum_{x=1}^{n-1}\frac{\varphi(x)}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+m)}=A_0\sum_{x=1}^{n-1}x^{(-m)}+A_1\sum_{x=1}^{n-1}x^{(-m+1)}+\ldots+A_{m-1}\sum_{x=1}^{n-1}x^{(-2)}, \quad (9)$$

де кожна з сум обчислюється по формулі (8).

Приклад 2.27. *(Московський автомобільний дорожній інститут, студентська олімпіада з математики, 1976р.) Знайти границю*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}\right).$$

Знайдемо спочатку суму

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}=\sum_{k=1}^{n}k^{(-3)}=-\frac{1}{2}k^{(-2)}\Big|_{1}^{n+1}=\frac{1}{4}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Тоді

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)=\frac{1}{4}.$$

Приклад 2.28. *Обчислити суму* $\sum_{x=1}^{7}\frac{4x+6}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$.

В цьому випадку $\varphi(x)=4x+6$ представимо у вигляді $\varphi(x)=-6+4(x+3)$. Тоді

$$\sum_{x=1}^{7}\frac{4x+6}{x(x+1)(x+2)(x+3)}=-6\sum_{x=1}^{7}\frac{1}{x(x+1)(x+2)(x+3)}+4\sum_{x=1}^{7}\frac{1}{x(x+1)(x+2)}=-6\Delta^{-1}x^{(-4)}\Big|_{1}^{8}+4\Delta^{-1}x^{(-3)}\Big|_{1}^{8}=$$

$$=\frac{2}{x(x+1)(x+2)}\Big|_{1}^{8}-\frac{2}{x(x+1)}\Big|_{1}^{8}=\frac{2}{8\cdot 9\cdot 10}-\frac{2}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{2}{8\cdot 9}+\frac{2}{1\cdot 2}=\frac{77}{120}$$

Отже, якщо степінь многочлена $\varphi(x)$ менший або більший за m, то обчислення суми IV не викликає особливих труднощів.

При умові, що степінь $\varphi(x)$ рівний m останній доданок в (9) прийме вид: $A_m\sum_{x=1}^{n-1}\frac{1}{x}$.

Ми вже говорили, що ця сума носить назву гармонійної і не виражається в скінченному вигляді. Поряд з цим існують методи, що дозволяють наближено обчислити гармонійну суму з будь-якою наперед заданою точністю. Питання апроксимації сум буде розглянуто в наступному розділі.

Наприкінці пункту приведемо кілька різноманітних вправ, що демонструють застосування різницевого числення при відшуканні скінченних сум.

1. $\Delta\frac{1+a^{2^x}}{1-a^{2^x}}=-\frac{2a^{2^x}}{1-a^{2^{x+1}}}$, тому

$$\frac{a}{1-a^2}+\frac{a^2}{1-a^4}+\frac{a^4}{1-a^8}+\ldots+\frac{a^{2^{x-1}}}{1-a^{2^x}}=\frac{1+a}{2(1-a)}-\frac{1+a^{2^x}}{2\left(1-a^{2^x}\right)}.$$

2. $\Delta\left(\frac{1}{2^x\sin\frac{\alpha}{2^x}}\right)^2=-\left(\frac{1}{2^{x+1}\cos\frac{\alpha}{2^{x+1}}}\right)^2$, отже

$$\left(\frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{4\cos\frac{\alpha}{4}}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{2^x\cos\frac{\alpha}{2^x}}\right)^2=\frac{1}{\sin\alpha}-\left(\frac{1}{2^x\sin\frac{\alpha}{2^x}}\right)^2.$$

3. $\Delta arctg(ax+b)=arctg\frac{a}{a^2x^2+\left(2ab+a^2\right)x+b^2+ab+1}$. Наприклад, при $a=b=1$:

$$arctg\frac{1}{1^2+3\cdot1+3}+arctg\frac{1}{2^2+3\cdot2+3}+\ldots+arctg\frac{1}{(n-1)^2+3\cdot(n-1)+3}=arctg(n+1)-arctg2.$$

3.3. Підсумовування частинами

Для ефективного знаходження сум часто буває корисним перетворення Абеля – дискретний аналог інтегрування частинами.

Детально про підсумовування частинами можна ознайомитися в [5, 11], ми ж зупинимося на розв'язуванні вправ.

Приклад 2.29. *Довести рівність*

$$\sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)b_k = a_n b_n - a_0 b_0 - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}(b_{k+1}-b_k) \qquad (1)$$

Доведення.

$$\sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)b_k = \sum_{k=0}^{n-1}a_{k+1}b_k - \sum_{k=0}^{n-1}a_k b_k \overset{k\to k+1}{=} \sum_{k=0}^{n-1}a_{k+1}b_k - \sum_{k=-1}^{n-2}a_{k+1}b_{k+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}a_{k+1}b_k - a_0 b_0 + a_n b_n - \sum_{k=0}^{n-1}a_{k+1}b_{k+1} = a_n b_n - a_0 b_0 - \sum_{k=0}^{n-1}a_{k+1}(b_{k+1}-b_k).$$

Рівність (1), яка часто виражається такою тотожністю:

$$\sum_{k=m}^{n} u(k+1)v(k+1) = U(n+1)v(n+1) - U(m)v(m) - \sum_{k=m}^{n} U(k)\Delta v(k), \qquad (2)$$

де $U(k) = \sum_{i=1}^{k} u(i)$ носить назву перетворення Абеля скінченних сум.

Формула підсумовування частинами спрощує підрахунки сум виду

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k)\lambda^{k-1};\ \sum_{k=0}^{n-1} f(k)\cos k\alpha;\ \sum_{k=0}^{n-1} f(k)\sin k\alpha;\ \sum_{k=0}^{n-1}\lambda^{k-1}\cos k\alpha;\ \sum_{k=0}^{n-1}\lambda^{k-1}\sin k\alpha.$$

Оскільки вправи такого типу ми вже навчилися розв'язувати, то в даному пункті обмежимося лише демонстрацією можливостей перетворення Абеля.

Приклад 2.30. *Знайти суму* $\sum_{k=1}^{n} k\cdot 3^k$.

Покладемо в (2) $u(k) = 3^{k-1}$; $v(k) = k-1$. Тоді

$$\sum_{k=1}^{n} k\cdot 3^k = \frac{1}{2}\left(3^{n+1}-1\right)\cdot n - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(3^k-1\right) = \frac{n3^{n+1}}{2} - \frac{3}{4}\left(3^n-1\right).$$

Приклад 2.31. *Обчислити суми, користуючись перетворенням Абеля.*

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n}\lambda^{k-1}\cos k\alpha; \quad S_2 = \sum_{k=1}^{n}\lambda^{k-1}\sin k\alpha.$$

Ці суми розглянемо паралельно, оскільки кожна з них виражається через іншу.

Відомо [5], що

$$\Delta \cos k\alpha = -2\sin\left(k\alpha + \frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2}; \quad \Delta \sin k\alpha = 2\cos\left(k\alpha + \frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2}; \quad \Delta^{-1}\lambda^{k-1} = \frac{\lambda^{k-1}}{\lambda - 1}.$$

Застосуємо формулу (1) для S_1 і S_2.

$$\mathrm{S}_1 = \frac{\lambda^n}{\lambda-1}\cos(n+1)\alpha - \frac{\cos\alpha}{\lambda-1} + \frac{2\sin\alpha/2}{\lambda-1}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(k\alpha + \frac{\alpha}{2}\right)\cdot\lambda^k = \frac{\lambda^n}{\lambda-1}\cos(n+1)\alpha - \frac{\cos\alpha}{\lambda-1} + \frac{\lambda\sin\alpha}{\lambda-1}S_2 + \frac{2\lambda\sin^2\alpha/2}{\lambda-1}S_1.$$

Аналогічно для другої суми матимемо:

$$\mathrm{S}_2 = \frac{\lambda^n}{\lambda-1}\sin(n+1)\alpha - \frac{\sin\alpha}{\lambda-1} - \frac{\lambda\sin\alpha}{\lambda-1}S_1 + \frac{2\lambda\sin^2\alpha/2}{\lambda-1}S_2.$$

З системи двох останніх рівностей знаходимо

$$S_1 = \frac{\lambda^n\left(\lambda\cos n\alpha - \cos(n+1)\alpha\right) + \cos\alpha - \lambda}{\lambda^2 - 2\lambda\cos\alpha + 1}; \qquad S_2 = \frac{\lambda^n\left(\lambda\sin n\alpha - \cos(n+1)\alpha\right) + \sin\alpha}{\lambda^2 - 2\lambda\cos\alpha + 1}.$$

Таким чином, перетворення Абеля дозволяє знаходити доволі непрості суми навіть не вникаючи в теорію різницевого числення та комплексних чисел. Це робить його зручним інструментом на уроках математики в школі, при підготовці олімпіадних завдань вчителем, а також може стати темою окремого факультативного заняття, що виступить прекрасною пропедевтикою до вивчення інтегрального числення, а знайдені методом підсумовування частинами суми – ілюстрацією обчислення інтегралів за означенням.

3.4. Спеціальні числа та їх застосування до знаходження скінченних сум

Дуже часто в математиці доводиться мати справу з різного роду числовими послідовностями, які відображають певні закономірності та властивості. Що ж стосується теми нашого дослідження, то ми розглянемо числа Стірлінга та числа Бернуллі як доповнення до основної теорії різницевого числення.

Ці числа, які виникли в теорії множин та математичному аналізі, знайшли широке застосування в дискретній математиці, спрощуючи як обчислення так і розуміння самого матеріалу, що особливо важливо для вчителя математики, основна задача якого – вчити складному елементарними методами. Тому ми пропонуємо ознайомитися зі спеціальними числами, що ввібрали в себе всі нюанси викладеної вище теорії та залишають просту і зрозумілу схему обчислення деяких видів сум.

3.4.1. Числа Стірлінга

Розглядаючи суми, породжені многочленами, квазімногочленами та дробами виду

$\frac{\varphi(x)}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+m)}$, де $\varphi(x)$ - ціла функція степені менше або більше m, ми зазначали, що задача значно спрощується, коли $\mathrm{f}(x)$ та $\varphi(x)$ представити через суму узагальнених степенів:

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x(x-1) + \ldots + A_m x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x+m-1). \quad (1)$$

Тоді, врахувавши, що $\Delta^{-1}x^{(m)} = \frac{x^{(m+1)}}{m+1}$, зводимо задачу з підсумовування до тривіального випадку. Після цього ставиться обернена задача:

$$x^{(n)} = B_1 x + B_2 x^2 + \ldots + B_n x^n. \quad (2)$$

Виявилося, що числа $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \ldots, \mathrm{B}_\mathrm{n}, \mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_\mathrm{m}$ пов'язані між собою та мають ряд цікавих закономірностей і властивостей. Вони отримали назву чисел Стірлінга першого та другого роду і позначаються s_{nk} і S_{nk} відповідно, де n - степінь многочлена, що розкладається, k - степінь в розкладі (1) чи (2), при якому стоїть коефіцієнт s_{nk} чи S_{nk}.

Розглянемо дві основні теореми, що відображають сказане вище.

Теорема 1. *Числа Стірлінга першого роду є коефіцієнтами розкладу узагальненого степеня за многочленами* x^k*, тобто*

$$x^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} s_{nk} x^k . \quad (3)$$

Теорема 2. *Числа Стірлінга другого роду є коефіцієнтами розкладу многочлена* x^n *за узагальненими степенями* $x^{(k)}$*, тобто*

$$x^n = \sum_{k=1}^{n} S_{nk} x^{(k)} . \quad (4)$$

Доведення [5, 13] цих тверджень проводять методом математичної індукції.

Цікавим є трактування чисел Стірлінга в теорії множин:

- s_{nk} позначає кількість способів представлення n елементів у вигляді k циклів і читається "k циклів із n". Наприклад, існує 11 способів представити два цикли з 4 елементів: [1,2,3] [4]; [1,2,4] [3]; [1,3,4] [2]; [2,3,4] [1]; [1,3,2] [4]; [1,4,2] [3]; [1,4,3] [2]; [2,4,3] [1]; [1,2] [3,4]; [1,3] [2,4]; [1,4] [2,3]. Отже $s_{42} = 11$.
- S_{nk} позначає число способів розбиття множини із n елементів на k непорожніх підмножин. Наприклад, існує 7 способів розбиття чотирьохелементної множини на 2 непорожні підмножини: $\{1,2,3\}\cup\{4\}$; $\{1,2,4\}\cup\{3\}$; $\{1,3,4\}\cup\{2\}$; $\{2,3,4\}\cup\{1\}$; $\{1,2\}\cup\{3,4\}$; $\{1,3\}\cup\{2,4\}$; $\{1,4\}\cup\{2,3\}$. Тому $S_{42} = 7$.

Числа Стірлінга мають багато різноманітних властивостей [13] із деякими з яких можна познайомитися в додатку 1. Ми ж обмежимося лише тими, що стосуються підсумовування. Звичайно, ці числа не набули б такого поширення, якби не існувало простої схеми їх отримання.

Числа Стірлінга першого роду задовольняють наступне рекурентне рівняння:

$$\begin{cases} s_{11} = 1, \\ s_{nk} = s_{(n-1)(k-1)} - (n-1)s_{(n-1)k}, \quad n \ge 2, \ k = 1, 2, ..., n. \end{cases}$$

Це дає можливість побудувати трикутник Стірлінга для чисел першого роду.

Таблиця 1. Числа Стірлінга першого роду

n	s_{n0}	s_{n1}	s_{n2}	s_{n3}	s_{n4}	s_{n5}	s_{n6}	s_{n7}
0	1							
1	0	1						
2	0	-1	1					
3	0	2	-3	1				
4	0	-6	11	-6	1			
5	0	24	-50	35	-10	1		
6	0	-120	274	-225	85	-15	1	
7	0	720	-1764	1624	-735	175	-21	1

Приклад 2.32. *Представити в канонічному вигляді многочлен*

$$f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4).$$

Тобто $\mathrm{f}(x) = x^{(5)}$. Використовуючи співвідношення (3) запишемо

$$x^{(5)} = \sum_{k=1}^{5} s_{5k} x^k = s_{51}x + s_{52}x^2 + s_{53}x^3 + s_{54}x^4 + s_{55}x^5 .$$

Знайшовши 6 рядок таблиці 1, підставимо значення чисел $\mathrm{s}_{5\mathrm{k}}$, $\mathrm{k} = 1, ..., 5$. Отримаємо

$$f(x) = x^5 - 10x^4 + 35x^3 - 50x^2 + 24x .$$

Числа Стірлінга другого роду задовольняють таким рекурентностям:

$$\begin{cases} S_{11} = 1, \\ S_{(n+1)k} = S_{n(k-1)} + kS_{nk}, \quad n \ge 1, \ k = 1, 2, ..., n. \end{cases}$$

Тоді таблиця чисел S_{nk} прийме вигляд.

Таблиця 2. Числа Стірлінга другого роду

n	S_{n0}	S_{n1}	S_{n2}	S_{nk}	S_{nk}	S_{nk}	S_{nk}	S_{nk}
0	1							
1	0	1						
2	0	1	1					
3	0	1	3	1				
4	0	1	7	6	1			
5	0	1	15	25	10	1		
6	0	1	31	90	65	15	1	
7	0	1	63	301	350	140	21	1

Приклад 2.33. *Знайти суму* $\sum\limits_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n}-1}\left(\mathrm{k}^4+2\mathrm{k}+4\right)$.

Якщо пригадати попередні розділи, то для розв’язання подібної задачі, ми використовували метод невизначених коефіцієнтів, який би привів нас до чотирьох визначників п’ятого порядку. Зараз же скористаємося числами Стірлінга.

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(k^4+2k+4\right)=\sum_{k=0}^{n-1}k^4+2\sum_{k=0}^{n-1}k+\sum_{k=0}^{n-1}4=\sum_{k=0}^{n-1}k^4+n(n-1)+4n=\sum_{k=0}^{n-1}k^4+n(n+3).$$

Знайдемо суму $\sum\limits_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n}-1}\mathrm{k}^4$. Для цього представимо многочлен $f(x)=x^4$ через узагальнений степінь, використовуючи таблицю 2.

$$x^4=x+7x^{(2)}+6x^{(3)}+x^{(4)}.$$

Тоді

$$\sum_{k=0}^{n-1}k^4=\Delta^{-1}k^4\Big|_0^n=\left(\frac{k^{(2)}}{2}+\frac{k^{(3)}}{7\cdot 3}+\frac{k^{(4)}}{6\cdot 4}+\frac{k^{(5)}}{5}\right)\Bigg|_0^n=\frac{n^{(2)}}{2}+\frac{n^{(3)}}{21}+\frac{n^{(4)}}{24}+\frac{n^{(5)}}{5}.$$

Для отримання остаточного результату застосуємо теорему 1 та табл. 1.

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(k^4+2k+4\right)=\frac{1}{30}n\left(6n^4-15n^3+10n^2+30n+89\right).$$

3.4.2. Числа Бернуллі

Перш за все відзначимо, що числа Бернуллі мають широке застосування в математичному аналізі, теорії комплексних функцій, інженерних розрахунках та в дискретній математиці. Звичайно, існує досить складна теорія, детально викладена в [Ге.].

Оскільки нашою задачею є методи підсумовування та можливість впровадження цього матеріалу в школу, то підемо найприроднішим – історичним шляхом виникнення даного поняття. Такий підхід, як показує педагогічний досвід, є найпродуктивнішим та сприяє кращому сприйняттю учнями та студентами.

Як правило, цікаві закономірності в математику приносить дослід. А в XVI–XVIII ст. "чиста" математика лише зароджувалася і дослід був вельми поширеним апаратом здобуття нових знань. Так, підбираючи формули для суми m-них степенів натурального ряду, Якоб Бернуллі помітив цікаву закономірність.

Нехай

$$S_m(n) = 1^m + 2^m + \ldots + (n-1)^m. \tag{5}$$

Розглядаючи формули для кількох перших сум:

$$\begin{aligned}
&S_0(n) = n;\\
&S_1(n) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n;\\
&S_2(n) = \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n;\\
&S_3(n) = \frac{1}{4}n^4 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2;\\
&S_4(n) = \frac{1}{5}n^5 - \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n;\\
&S_5(n) = \frac{1}{6}n^6 - \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2;\\
&S_6(n) = \frac{1}{7}n^7 - \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n;\\
&S_7(n) = \frac{1}{8}n^8 - \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 - \frac{7}{24}n^4 + \frac{1}{12}n^2,
\end{aligned}$$

Бернуллі визначив такі факти:

а) в формулі для $S_m(n)$ коефіцієнт при n^{m+1} рівний $1/_{m+1}$;

б) коефіцієнт при n^m завжди рівний $-1/_2$;

в) коефіцієнт при n^{m-1} рівний $\frac{m}{12}$;

г) коефіцієнт при n^{m-2} рівний 0 і т.д.

В загальному випадку

$$S_m(n) = \frac{1}{m+1}\left(B_0 n^{m+1} + C_{m+1}^1 B_1 n^m + \ldots + C_{m+1}^m B_m n\right). \qquad (6)$$

Коефіцієнти $B_0, B_1, \ldots, B_m$ дістали назву чисел Бернуллі або бернулієвих чисел і визначаються з такого рекурентного рівняння

$$\sum_{k=0}^{m} C_{m+k}^k B_k = \begin{cases} 0, & m \neq 0, \\ 1, & m = 0. \end{cases} \qquad (7)$$

З (7) знаходимо кілька перших чисел Бернуллі.

Таблиця 3. Числа Бернуллі.

n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
B_n	1	$-1/2$	$1/6$	0	$-1/30$	0	$1/42$	0	$-1/30$	0	$5/66$

Якось Якоб написав в своїх мемуарах: “… в продовж половини четверті години я знайшов суму десятих степенів першої тисячі натуральних чисел”. Це говорить про те, що, в основному, числа Бернуллі використовуються при знаходженні суми степенів перших n натуральних чисел.

Приклад 2.34. *Знайти суму* $\sum_{k=1}^{n-1} k^6$.

Використовуючи формулу (6) та значення чисел Бернуллі запишемо:

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^6 = \frac{1}{7}\left(B_0 n^7 + C_7^1 B_1 n^6 + C_7^2 B_2 n^5 + C_7^3 B_3 n^4 + C_7^4 B_4 n^3 + C_7^5 B_5 n^2 + C_7^6 B_6 n\right).$$

Остаточно

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^6 = \frac{1}{7}\left(n^7 - \frac{7}{2}n^6 + \frac{21}{6}n^5 - \frac{7}{6}n^3 + \frac{1}{6}n\right).$$

Перевірка:

$$n = 4 \quad \sum_{k=1}^{3} k^6 = 1^6 + 2^6 + 3^6 = 794;$$

з другого боку $\frac{1}{7}\left(4^7 - \frac{7}{2}4^6 + \frac{21}{6}4^5 - \frac{7}{6}4^3 + \frac{1}{6}4\right) = 794$.

Як бачимо, цей спосіб ефективніший за метод невизначених коефіцієнтів та за використання чисел Стірлінга. А оскільки суми степенів перших n натуральних чисел зустрічаються в шкільному курсі математики досить часто, вчитель має володіти доступним учнівському розумінню методом здобуття відповідних формул.

В додатку 2 приведені формули для перших 11 степенів чисел натурального ряду. Кидається у вічі те, що при парних показниках степеня сума ділиться на $n(n-1)$, а при непарних – на $[n(n-1)]^2$. Спробуємо довести цей факт, користуючись числами Бернуллі.

Теорема. *Сума* $S_m(n)=1^m+2^m+\ldots+(n-1)^m$ *при непарних* m *ділиться на* $[n(n-1)]^2$, *а при парних – на* $n(n-1)$.

Доведення.

Формула (6) стверджує, що

$$S_m(n)=\frac{1}{m+1}\left(B_0 n^{m+1}+C_{m+1}^1 B_1 n^m+\ldots+C_{m+1}^m B_m n\right).$$

Знайдемо $S_m(0)$ та $S_m(1)$:

$$S_m(0)=0$$

$$S_m(1)=\frac{1}{m+1}\left(B_0+C_{m+1}^1 B_1+\ldots+C_{m+1}^m B_m\right)\overset{\text{рівність(7)}}{=}0 \text{ при } m\neq 0.$$

Отже, для довільного натурального m сума $S_m(n)$ ділиться на многочлен $n(n-1)$. Доведемо тепер, що при $m=2p+1$ $S_m(n)$ ділиться на $[n(n-1)]^2$.

Припустимо, що $S_m(n)$ ділиться на $(n-1)^2$. Тоді $S_m(n)$ можна подати у вигляді

$$S_m(n)=\frac{1}{m+1}\left(n^2-2n+1\right)\left(A_1 n^{m-1}+A_2 n^{m-1}+\ldots+A_{m-1}n\right),$$

де $A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}$ - невизначені коефіцієнти. Для їх визначення скористаємося рівністю многочленів

$$B_0 n^{m+1}+C_{m+1}^1 B_1 n^m+C_{m+1}^2 B_2 n^{m-1}+\ldots+C_{m+1}^m B_m n=\left(n^2-2n+1\right)\left(A_1 n^{m-1}+A_2 n^{m-1}+\ldots+A_{m-1}n\right).$$

Прирівнявши коефіцієнти при відповідних степенях, отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} B_0=A_1, \\ C_{m+1}^1 B_1=A_2-2A_1, \\ C_{m+1}^2 B_2=A_1-2A_2+A_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_{m+1}^k B_k=A_{k-1}-2A_k+A_{k+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_{m+1}^{m-2} B_{m-2}=A_{m-3}-2A_{m-2}+A_{m-1}, \\ C_{m+1}^{m-1} B_{m-1}=A_{m-2}-2A_{m-1}, \\ C_{m+1}^m B_m=A_{m-1}. \end{cases} \qquad (*)$$

Тепер, якщо m непарне, то $B_m=0$, з чого випливає рівність нулю коефіцієнта при першому степені n - A_{m-1} в рівності (6). Всі інші коефіцієнти визначаються з системи (*) однозначно. Отже, при непарному m $S_m(n)$ можна представити у вигляді

$$S_m(n)=\frac{1}{m+1}n^2(n-1)^2\left(A_1n^{m-3}+A_2n^{m-4}+\ldots+A_{m-2}\right).$$

Залишається довести, що $S_m(n)$ при непарних m ділиться на $(n-1)^2$. Той факт, що $S_m(n)$ ділиться на $(n-1)$ для будь-якого натурального m доведено вище. Тому

$$S_m(n)=\frac{1}{m+1}(n-1)f(n),$$

де $f(n)$ - деякий многочлен відносно n. Якщо показати, що $f(1)\equiv 0$, то теорема буде повністю доведена. Для цього спочатку знайдемо $f(n)$. Очевидно, це можна зробити, виконавши ділення $S_m(n)$ на $\frac{1}{m+1}(n-1)$ одним із доступних методів (наприклад, кутом). В результаті цієї операції, отримаємо

$$S_m(n)=\frac{1}{m+1}(n-1)\left(B_0n^m+\left(C_{m+1}^1B_1+B_0\right)n^{m-1}+\left(C_{m+1}^2B_2+C_{m+1}^1B_1+B_0\right)n^{m-2}+\ldots+n\sum_{k=0}^{m}C_{m+1}^kB_k\right).$$

Хто не задовольниться діленням многочленів, може провести доведення методом математичної індукції, використавши отриманий результат.

Отже,

$$f(n)=B_0n^m+\left(C_{m+1}^1B_1+B_0\right)n^{m-1}+\left(C_{m+1}^2B_2+C_{m+1}^1B_1+B_0\right)n^{m-2}+\ldots+n\sum_{k=0}^{m}C_{m+1}^kB_k\ .$$

Покажемо, що $f(1)\equiv 0$.

$$f(1)=B_0+\left(C_{m+1}^1B_1+B_0\right)+\left(C_{m+1}^2B_2+C_{m+1}^1B_1+B_0\right)+\ldots+\sum_{k=0}^{m}C_{m+1}^kB_k\ .$$

Або

$$f(1)=mB_0+(m-1)C_{m+1}^1B_1+\ldots+(m-k)C_{m+1}^kB_k+\ldots+B_0.$$

Перепишемо останню рівність наступним чином:

$$f(1)=\sum_{k=0}^{m}(m-k)C_{m+1}^kB_k=m\sum_{k=0}^{m}C_{m+1}^kB_k-\sum_{k=0}^{m}kC_{m+1}^kB_k\ .$$

Врахувавши (7) матимемо

$$f(1)=-\sum_{k=0}^{m}kC_{m+1}^kB_k\ \text{ при } \mathrm{m}=2\mathrm{p}+1,\ \mathrm{p}\in\mathrm{N}\,.$$

Рівність $\sum_{k=0}^{m}kC_{m+1}^{k}B_{k}$ нулю проводять методом математичної індукції.

Теорема доведена.

Твердження теореми можна посилити, довівши, що $S_m\left(\frac{1}{2}\right)\equiv 0$ при парних m. Пропонуємо зробити це самостійно.

Вправи для самостійного розв'язування.

До пункту 3.1. Різницеве числення.

1. Знайти різниці

а) $\Delta\frac{x+1}{x-1}$; б) $\Delta\frac{x^2-1}{x^2+1}$; в) $\Delta\sin^2 x$; г) $\Delta x^{(3)}\sin x$; д) $\Delta x^{(-2)}\sin 2x$.

2. Знайти антирізниці

а) $\Delta^{-1}(x+1)2^x$; б) $\Delta^{-1}(x^2+1)\lambda^x$; в) $\Delta^{-1}arctg\frac{1}{2(a+n)^2}$.

3. Довести рівність

а) $\Delta^{-1}(x^m a^x)=\frac{a^x}{a-1}\left(x^m-\frac{a}{a-1}\Delta x^m+\left(\frac{a}{a-1}\right)^2\Delta^2x^m+\ldots+\left(-\frac{a}{a-1}\right)^m m!\right)$;

б) $\Delta^{-1}(x^{(m)}a^x)=\frac{a^x}{a-1}\left(x^{(m)}-\frac{a}{a-1}mx^{m-1}+\left(\frac{a}{a-1}\right)^2 m(m-1)x^{(m-2)}+\ldots+\left(-\frac{a}{a-1}\right)^m m!\right)$.

4. Знайти суми

а) $\sum_{k=1}^{n-1}k\cdot 2^k$; б) $\sum_{x=1}^{n-1}\frac{1}{x(x+1)(x+2)}$; в) $\sum_{k=1}^{n-1}k^{-3}\cdot 2^k$; г) $\sum_{k=0}^{\infty}arctg\frac{1}{2(a+k)^2}$.

5. Розв'язати рекурентні співвідношення

а) $S_{n+4}=4S_{n+3}-6S_{n+2}-4S_{n+1}-S_n$; б) $S_{n+5}=5S_{n+4}-10S_{n+3}+10S_{n+2}-5S_{n+1}+S_n$.

До пункту 3.2. Підсумовування методом скінченних різниць.

1. Обчислити наступні суми

1) $\sum_{k=0}^{n}(2k^2+7k+11)$; 2) $\sum_{k=1}^{n-1}(k^5+4k)$; 3) $\sum_{x=1}^{10}x(x-1)(x-2)$; 4) $\sum_{k=0}^{8}k^5\cdot 2^k$; 5) $\sum_{k=1}^{n-1}(k^4+1)3^{4k}$;

6) $\frac{1}{k(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$; 7) $\frac{1}{10\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 12}+\ldots+\frac{1}{2000\cdot 2001}$;

8) $\sum_{k=0}^{10}3^k\sin\left(\frac{\pi}{4}k\right)$; 9) $\sum_{k=0}^{10}(k^2+1)2^k\cos\alpha k$; 10) $\sum_{x=1}^{n-1}\frac{3x^2+7x+1}{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$.

До пункту 3.3. Підсумовування частинами.

1. Довести рівність (2), користуючись означенням антирізниці.

2. Знайти суми, користуючись перетворенням Абеля

а) $\sum\limits_{k=1}^{n-1} k \cdot 2^k$; б) $\sum\limits_{k=1}^{n-1} k^2 \cdot 2^k$; в) $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\cos k\alpha}{\cos^k \alpha}$; г) $\sum\limits_{k=1}^{n} \cos^{k-1}\alpha \cos k\alpha$; д) $\sum\limits_{k=1}^{n} (n-k+1)\lambda^k$.

3. Знайти суму $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{2k+1}{k(k+1)}$ двома способами: а) розкладанням на елементарні дроби; б) сумуванням частинами.

До пункту 3.4. Спеціальні числа та їх застосування до знаходження скінченних сум.

1. Заповніть 8, 9, 10 рядки таблиць для чисел Стірлінга першого та другого роду.

2. Доведіть рівності

а) $s_{n(n-1)} = S_{n(n-1)} = C_n^2$; б) $\sum\limits_{k=1}^{n-1} \left(s_{(n-1)k} - s_{nk}\right) n^k = n^n$; в) $S_{n2} = 2^{n-1} - 1$ при $n > 0$.

3. Знайдіть нижче подані суми двома способами: з допомогою чисел Стірлінга та Бернуллі.

а) $\sum\limits_{k=1}^{n-1} k^7$; б) $\sum\limits_{k=1}^{n-1} k^{10}$.

4. Побудуйте всі можливі цикли з шести елементів по два.

4. Застосування теорії ймовірностей до обчислення деяких типів сум

Як показує досвід, досить часто задачі, які ставить одна галузь знань, розв'язує інша, користуючись власними методами та прийомами.

Так, описуючи штучні методи знаходження скінченних сум, ми, по суті, намагалися залучити різноманітний математичний матеріал до вирішення поставленої проблеми.

В той же час, навіть висвітливши метод скінченних різниць, приходимо до висновку, що далеко не всі суми піддаються спрощенню. Причин цьому може бути багато, серед яких головною є необхідність здійснення колосального об'єму роботи для отримання результату.

З цією ж проблемою стикаються як студенти, так і школярі, яких мало вчили мислити, експериментувати та проводити паралелі в матеріалі, що вивчається. Саме тому ця глава має на меті продемонструвати, на прикладі обчислення сум, як нестандартна інтерпретація задачі може підказати простий шлях її розв'язання. Почнемо з деяких фактів теорії ймовірностей [5].

Дослід, результати якого заздалегідь передбачити неможливо, називається *стохастичним експериментом*.

Під *випадковою величиною* розуміють числову величину ξ, яка з'являється ва результаті стохастичного експерименту.

Кожна випадкова величина характеризується *ймовірністю* її виникнення в результаті деякої події. Таблично це зображається у вигляді розподілу випадкової величини ξ, яка може приймати значення $x_1, x_2, ..., x_k$ з ймовірностями $p_1, p_2, ..., p_k$ відповідно.

Таблиця 1. Розподіл випадкової величини.

ξ	x_1	x_2	x_3	...	x_k
P	p_1	p_2	p_3	...	p_k

Математичним сподіванням випадкової величини ξ, заданої своїм розподілом, називається число $M\xi$, яке визначається формулою

$$M\xi = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k \,. \tag{1}$$

Говорячи простіше, матиматечне сподівання – це середнє значення ряду чисел $x_1, x_2, ..., x_k$ [23]. Властивості математичного сподівання детально описані в [25].

Дисперсією випадкової величини ξ, заданої своїм розподілом, називається матиматичне сподівання випадкової величини $(\xi - M\xi)^2$, тобто

$$D\xi = \sum_{k=1}^{n} (x_k - M\xi) p_k \ . \qquad (2)$$

По суті, дисперсія показує відхилення значення випадкової величини від її математичного сподівання.

Висновок, який можна зробити з даної теорії простий: якщо якимось чином нам стане відоме матиматичне сподівання деякої випадкової величини ξ, то тоді

$$\sum_{k=1}^{n} x_k p_k = M\xi \ .$$

Це ж саме стосується і дисперсії. Таким чином отримали ймовірнісне наповнення задачі з підсумовування.

Сума (1) в залежності від заданого розподілу може бути вельми непростою для вивчених раніше методів знаходження сум. Для прикладу розглянемо розподіл, який носить назву біноміального

ξ	1	0
P	p	$1-p$

Деяка подія настає ($\xi = 1$) з ймовірністю p і не настає ($\xi = 0$) з ймовірністю $1-p$. Знайдемо математичне сподівання такої випадкової величини

$$M\xi = \sum_{k} x_k p_k = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p \ .$$

Такі випробування дістали назву схема Бернулі [5, 23, 25, 26].

Тепер розглянемо випадкову величину $\xi = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_m$, яка рівна кількості успіхів в n випробуваннях Бернуллі. Очевдно, що ξ приймає значення від 0 до n.

В [5] показано, що ймовірність m успіхів в n випробуваннях Бернуллі обчислюється за формулою:

$$p_{nm} = C_n^m p^m (1-p)^{n-m} \ .$$

Спробуємо обчислити математичне сподівання такої випадкової величини. Зодного боку

$$M\xi = \sum_{k=1}^{n} k C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \ ,$$

з іншого - $M\xi = M(\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n) = M\xi_1 + M\xi_2 + ... + M\xi_n = np$, де ξ_i, $\mathrm{i} = 1, ..., \mathrm{n}$ задано біноміальним розподілом. Отже, робимо висновок

$$\sum_{k=1}^{n} k C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = np \ . \qquad (*)$$

Приклад 2.35. *Знайти суму* $\sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$.

Будемо дивитися на x як на ймовірність деякої події. Врахувавши значення дисперсії (2), перепишемо суму у вигляді

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \left((k-nx)^2 + 2kn - n^2x^2\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (k-nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} + 2nx \sum_{k=1}^{n} k C_n^k x^k (1-x)^{n-k} - n^2x^2 \sum_{k=1}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} .$$

Оскільки $p_{nk} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ - ймовірність k успіхів в n випробуваннях Бернуллі, то

$$\sum_{k=1}^{n} (k-nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} (k - M\xi x)^2 p_{nk} = D\xi .$$

Тоді, враховуючи (*), маємо

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = D\xi + 2n^2x^2 - n^2x^2 = D\xi + n^2x^2 .$$

Дисперсію порахувати нескладно, оскільки $D\xi = D\xi_1 + D\xi_2 + \ldots + D\xi_n = np(1-p)$. Тоді

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x) + n^2x^2 .$$

Розглянемо інший приклад. Нехай випадкова величина ξ приймає значення $1, 2, \ldots$ з ймовірностями $p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $\lambda > 0$. Це так званий розподіл Пуассона. Тут $M\xi = D\xi = \lambda$. Він дає змогу обчислювати суми вигляду

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} \text{ та } \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} .$$

Приклад 2.36. *Обчислити суму* $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{2^k}{k!}$.

Підібрати антирізницю до функції, яка породжує дану суму не так просто. Тому скористаємося ймовірнісними міркуваннями. Будемо дивитися на k як на випадкову цілочисельну величину. Тоді перепишемо шукану суму у вигляді

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{2^k}{k!} = e^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{2^k}{k!} e^{-2} = e^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left((k-2)^2 + 4k - 4\right) \frac{2^k}{k!} e^{-2} =$$

$$= e^2 \sum_{k=1}^{\infty} (k-2)^2 \frac{2^k}{k!} e^{-2} + 4e^2 \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{2^k}{k!} e^{-2} - 4e^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!} e^{-2} = e^2 \sum_{k=1}^{\infty} (k - M\xi_k)^2 \frac{2^k}{k!} e^{-2} + 4e^2 M\xi - 4e^2 .$$

Отже,

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{2^k}{k!} = e^2 \cdot D\xi + 4e^2 \cdot M\xi - 4e^2 = 6e^2 .$$

Вправи для самостійного розв'язування.

1. Перевірити тотожності

а) $\sum_{k=0}^{n} C_{n_1+1}^{k} p^k (1-p)^{n_1-k} \cdot C_{n_2+1}^{n-k} p^{n-k} (1-p)^{n_2-n+k} = C_{n_1+n_2}^{n} p^n (1-p)^{n_1+n_2-n}$;

б) $\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda_2} = \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{k!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$.

2. Знайти суми

а) $\sum_{k=0}^{n} \frac{kC_n^k}{2^n}$; б) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k3^k}{k!}$; в) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 3^k}{k!}$.

3. Довести, що

$$1+\frac{\lambda}{1!}+\frac{\lambda^2}{2!}+\ldots+\frac{\lambda^n}{n!}=\frac{1}{e^{\lambda} n!}\int_{\lambda}^{\infty} e^{-x} x^n dx.$$

III. Методи апроксимації сум

Нужда породила труд,

Труд породил высокое знание.

Бальзак.

Аналізуючи викладений вище матеріал, можна зробити висновок про те, що існує досить багато методів знаходження скінченних сум. Поряд з цим, навіть найрозвинутіша в цьому плані теорія різницевого числення стверджує, що не для будь-якої функції її антирізниця, а отже, і сума, яку вона породжує, виражається в замкненому вигляді. В той же час інженерні розрахунки, економічно-планові задачі, статистичні дані і т.п. як правило користуються наближеними методами, ставлячи жорсткі вимоги до похибки обчислень.

Саме тому, зважаючи на тенденції поширення асимптотичних методів в шкільному курсі математики [1, 2, 26], ми вирішили в оглядовому плані розкрити деякі питання наближеного обчислення сум, що безпосередньо пов’язано з наближеним обчисленням інтегралів [17], інтерполюванням функцій [14] та іншими питаннями чисельного аналізу.

Розглядається формула підсумовування Ейлера як універсальний засіб обчислення сум та її застосування до апроксимації Стірлінга. Детальні доведення [11, 19] викладених фактів опускаються через обмеженість обсягу роботи, проте розділ розраховано на студентів та учнів старших класів з відповідною математичною підготовкою.

1. Гармонійні числа

В першому розділі ми відзначили, що зовні проста сума

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \qquad (1)$$

яка носить назву гармонійної, не виражається в скінченному вигляді. Поряд з цим її поширення як в класичних так і в дискретних розділах, змушує нас шукати шляхи оперування з гармонічними числами $\mathrm{H_n}$ першого роду.

Відомо [24], що сума (1) при нескінченному зростанні n прямує до нескінченності. Постає питання: “яким чином можна знайти $\mathrm{H_n}$ не вдаючись до додавання n-ої кількості дробів?” Відповідь на це запитання дають такі міркування: оскільки $\int_1^n \frac{1}{x}dx = \ln x\Big|_1^n$, то неперервним аналогом суми (1) є функція $y = \ln x$, що відразу підказує спосіб оцінки $\mathrm{H_n}$.

Приклад 3.1. *Знайти наближене значення суми перших* n *членів гармонійної послідовності.*

Перепишемо суму (1) у вигляді:

$$H_n = 1\cdot 1 + 1\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{3} + \ldots + 1\cdot\frac{1}{n}.$$

Кожний доданок рівний площі прямокутника зі сторонами 1 і $\frac{1}{\mathrm{k}}$, де $\mathrm{k} = 1, 2, \ldots, \mathrm{n}$. Це, в свою чергу, дає зручну геометричну інтерпретацію.

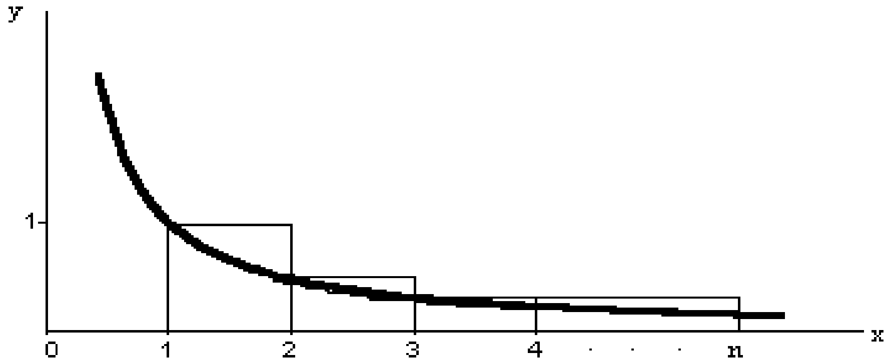

Рис. 3.1

Побудований на рис. 3.1 графік функції $y = \frac{1}{x}$ дозволяє зробити такий висновок:

$$\int_1^n \frac{1}{x}dx = \ln n < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = H_n.$$

Отже, з одного боку $H_n > \ln n$. З іншої сторони, змістивши прямокутники вліво на одиницю, матимемо другу очевидну нерівність (Рис. 3.2) $H_n < \ln n + 1$.

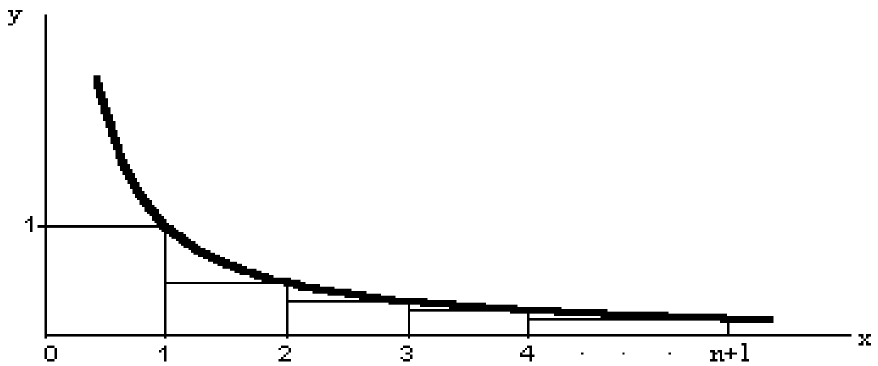

Рис. 3.2

Отже, ми з’ясували, з точністю до одиниці, що

$$\ln n < H_n < \ln n + 1. \qquad (2)$$

Постає задача підвищення точності, адже навіть для суми

$$18{,}4 < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{100\,000\,000} < 19{,}4$$

в сто мільйонів доданків, похибка в одиницю є суттєвою.

Розглянемо гармонійні числа m-го порядку.

$$H_n^{(m)} = 1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \ldots + \frac{1}{n^m} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^m}. \tag{3}$$

При $n \to \infty$ отримуємо відому [24] дзета-функцію Рімана $\zeta(m) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^m}$. Виявляється [13], що $H_n^{(m)}$ дають змогу уточнити значення суму (1). Для цього розглянемо ряд

$$\ln \frac{k}{k-1} = \frac{1}{k} + \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{3k^3} + \frac{1}{4k^4} + \frac{1}{5k^5} + \ldots,$$

який збігається [24] для $k > 1$.

Просумуємо ліву і праву частину останньої рівності в межах від 2 до n

$$\ln n - \ln 1 = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{3k^3} + \frac{1}{4k^4} + \ldots \right), \text{ або } \ln n = (H_n - 1) + \frac{1}{2}\left(H_n^{(2)} - 1\right) + \frac{1}{3}\left(H_n^{(3)} - 1\right) + \ldots.$$

Звідси визначаємо формулу, отриману Ейлером для суми гармонійного ряду:

$$H_n = \ln n + 1 - \frac{1}{2}\left(H_n^{(2)} - 1\right) - \frac{1}{3}\left(H_n^{(3)} - 1\right) - \ldots \tag{4}$$

Таким чином, взявши в правій частині рівності певну кількість членів суми $H_n^{(2)}$, $H_n^{(3)}$ і т. д., отримуємо будь-яку наперед задану точність. Підемо далі. Оскільки ряд (3) для $m \ge 2$ збіжний [24] при $n \to \infty$, то існує скінченна границя

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{2}\left(H_n^{(2)} - 1\right) - \frac{1}{3}\left(H_n^{(3)} - 1\right) - \ldots \right) = 1 - \frac{1}{2}(\zeta(2) - 1) - \frac{1}{3}(\zeta(3) - 1) - \ldots = \gamma,$$

яку прийнято називати ейлеревою константою. Чисельно $\gamma = 0{,}5772156649\,0\ldots$ Тоді з рівності (4) випливає, що

$$\lim_{n \to \infty} (H_n - \ln n) = \gamma. \tag{5}$$

Отже, остаточно

$$H_n \approx \ln n + \gamma. \tag{6}$$

В той же час, використовуючи формулу Ейлера - Маклорена, яка буде розглянута нижче, можна побудувати подальші уточнення (6).

Приклад 3.2. *(Кіровоградська обласна олімпіада з математики, 1999р., 11 клас)*

Довести нерівність:

$$\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \ldots + \frac{1}{2000^3} < \frac{1}{4}. \tag{*}$$

Один із способів, який пропонує автор [8] заключається в схемі, описаній при апроксимуванні суми гармонійного ряду. Нерівність (*) еквівалентна нерівності

$$\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+\ldots+\frac{1}{2000^3}<\frac{1}{8}.$$

Згідно прикладу 3.1 маємо

$$\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+\ldots+\frac{1}{2000^3}<\int_2^{2000}\frac{1}{x^3}dx=-\frac{1}{2x^2}\bigg|_2^{2000}=\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{2\cdot 2000^2}\right)<\frac{1}{8}.$$

2. Формула Ейлера - Маклорена

Формула Ейлера - Маклорена є, по суті, основним методом апроксимації сум інтегралами, яка враховує похибку при обчисленні.

В 1732 році в праці “Methodus generalis summandi progressiones” Ейлер опублікував формулу

$$\sum_{x=a}^{b-1} f(x)=\int_a^b f(x)dx+\sum_{k\geq 1}\frac{B_k}{k!}f^{(k-1)}(x)\Big|_a^b, \tag{1}$$

де $\mathrm{f}^{(k-1)}(x)$ - похідна k -го порядку функції $\mathrm{f}(x)$; $\mathrm{B_k}$ - числа Бернуллі.

В 1823 році Пуассон в роботі “Memoire sur le calcul numerique des integrales definies” уточнив формулу (1), додавши залишковий член, який грає важливу роль у випадку розбіжності суми $\sum\limits_{k\geq 1}\frac{B_k}{k!}f^{(k-1)}(x)\Big|_a^b$ та при визначенні похибки обчислень.

$$\sum_{x=a}^{b-1} f(x)=\int_a^b f(x)dx+\sum_{k\geq 1}\frac{B_k}{k!}f^{(k-1)}(x)\Big|_a^b+R_m(x), \tag{2}$$

де $R_m(x)=(-1)^{m+1}\int\limits_a^b\frac{B(\{x\})}{m!}f^{(m)}(x)dx$, $m\geq 1$.

Наприклад, при $\mathrm{f}(x)=x^{m-1}$, $\mathrm{f}^{(m)}(x)=0$. Тому $R_m=0$ і формула (2) приймає вигляд формули (1).

$$\sum_{k=a}^{b-1} k^{m-1}=\frac{x^m}{m}\bigg|_a^b+\sum_{k=1}^{m}\frac{B_k}{k!}(m-1)^{(k-1)}x^{m-k}\Big|_a^b=\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m}C_m^k B_k\left(b^{m-k}-a^{m-k}\right).$$

При $a=0$ отримуємо виведену в попередньому розділі формулу

$$\sum_{k=0}^{n-1}k^m=\frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}C_m^k B_k n^{m-k}.$$

Строгий вивід формули (2), включаючи аналіз залишкового члена $\mathrm{R_m}$ займає об’єм близько 4-5 друкованих аркушів [11, 19], тому, в силу об’єктивних причин, воно тут не приводиться. Зупинимося на конкретних вправах, розв’язання яких потребує використання формули Ейлера – Маклорена для наближеного обчислення скінченних сум.

Приклад 3.3. *Уточнити формулу для суми перших n членів гармонійного ряду.*

Для суми $\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \frac{1}{\mathrm{k}}$ $\mathrm{f}(x)=\frac{1}{x}$. Застосуємо формулу (2) для $(\mathrm{n}-1)$-го доданку.

$$\sum_{x=1}^{n} \frac{1}{x} = \sum_{x=1}^{n-1} \frac{1}{x} + \frac{1}{n} = \int_{1}^{n} \frac{1}{x} dx + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_k}{k!} f^{(k-1)}(x)\Big|_1^n + R_m(x).$$

Оскільки $\mathrm{f}^{(m)}(x)=\left(\frac{1}{x}\right)^{(m)} \sim O\left(x^{-m-1}\right)$, то залишковий член прямує до нуля при $x \to \infty$.

Отже,

$$\sum_{x=1}^{n} \frac{1}{x} = \ln n - \ln 1 + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_k}{k!} f^{(k-1)}(x)\Big|_1^n + \frac{1}{n} + R_m(x).$$

Оскільки $\mathrm{B_k}=0$ при непарних k, а $\left.\frac{\mathrm{f}^{(\mathrm{k}-1)}(x)}{\mathrm{k}!}\right|_1^{\mathrm{n}} = -\left.\frac{1}{\mathrm{kn}^{\mathrm{k}}}\right|_1^{\mathrm{n}}$, то остання суму рівна:

$$\sum_{x=1}^{n} \frac{1}{x} = \ln n + \frac{1}{n} - \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{2kn^{2k}} + \frac{B_1}{n} - R_{2m}(x),$$

де $R_{2m}(x)$ рівний сумі всіх сталих величин плюс залишок $R_m(x)$. Ця стала і є сталою Ейлера. Остаточно отримаємо

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{2kn^{2k}} - O\left(n^{-2m-2}\right),$$

де символ $O\left(n^{-2m-2}\right)$ показує похибку, яка допускається при обчисленні. Точність, що потребується, регулюється вибором числа m - кількість членів залишкової суми.

Наприклад, при $\mathrm{m}=4$ отримаємо таку апроксимацію гармонійної суми:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \sum_{k=1}^{4} \frac{B_{2k}}{2kn^{2k}} - O\left(n^{-10}\right).$$

Пригадавши значення чисел Бернуллі (додаток 2), маємо

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \left(\frac{B_2}{2n^2} + \frac{B_4}{4n^4} + \frac{B_6}{6n^6} + \frac{B_8}{8n^8}\right) - O\left(n^{-10}\right) =$$
$$= \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} - \frac{1}{252n^6} + \frac{1}{140n^8} - O\left(n^{-10}\right).$$

Цей метод, в свою чергу, дає можливість уточнити значення сталої Ейлера. Так в [13] приводиться той факт, що коли взяти $\mathrm{n}=10\,000$ і $\mathrm{m}=250$, то γ можна обрахувати з 1271 вірною десятковою цифрою, які починаються так:

$$\gamma = 0{,}5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672348848677 3\ldots$$

3. Апроксимація Стірлінга

Одним з найголовніших наслідків формули Ейлера – Маклорена є апроксимація Стірлінга, якою користуються для наближеного обчислення логарифма добутку

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n\,.$$

Для доведення формули Стірлінга візьмемо функцію $\mathrm{f}(x)=\ln x$, яка задовольняє таким умовам:

1) $\mathrm{f}^{(m)}(x)$ зберігає один і той же знак при всіх парних значеннях m і при всіх значеннях x.

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{f}^{(m)}(x)=0$ для будь-якого m.

Знайдемо похідну $(\mathrm{k}-1)$-го порядку функції $\mathrm{f}(x)$: $\mathrm{f}^{(k-1)}(x)=(-1)^k\dfrac{(k-2)!}{x^{k-1}}$ та застосуємо формулу (2), додавши до обох частин $\ln n$.

$$\sum_{k=1}^{n-1}\ln k+\ln n=\ln n+\int_1^n \ln x dx+\sum_{k=1}^{m}\frac{B_k}{k!}f^{(k-1)}(x)\Big|_1^n+R_m\,,\quad \text{де } R_m\sim O\left(\frac{B_{2m}}{m^2n^{2m-1}}\right).$$

Як і в випадку з гармонійним рядом $\sum\limits_{k=1}^{m}\dfrac{B_k}{k!}\mathrm{f}^{(k-1)}(x)\Big|_1^n$ дасть члени, які будуть залежати від n та сталі. Об’єднаємо сталі літерою C. Тоді, винісши член $\dfrac{B_1}{1!}\ln n$ за знак суми, одержимо

$$\ln n!=\ln n+n\ln n-n+B_1\ln n+C+\sum_{k=2}^{m}(-1)^k\frac{B_k(k-2)!}{k!n^{k-1}}+O\left(\frac{B_{2m}}{m^2n^{2m-1}}\right).$$

Остаточно

$$\ln n!=C+n\ln n-n+\frac{1}{2}\ln n+\sum_{k=2}^{m}(-1)^k\frac{B_k(k-2)!}{k!n^{k-1}}+O\left(\frac{B_{2m}}{m^2n^{2m-1}}\right). \qquad (4)$$

Це, по суті, і є формула Стірлінга. Залишається обчислити значення сталої C. Для цього скористаємося формулою Валліса:

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\,. \qquad (*)$$

Поклавши в формулі (4) $\mathrm{k}=1$ матимемо:

$$\ln n!=C+\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n-n+O\left(\frac{B_2}{2n}\right).$$

Заміна $n\to 2n$ дає $\ln 2n!=C+\left(2n+\dfrac{1}{2}\right)\ln 2n-2n+O\left(\dfrac{B_2}{4n}\right).$

Виконаємо перетворення формули (*) наступним чином

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}=\left(\frac{(2n)!}{(2n-1)!}\right)^2\frac{1}{2n+1}=\left(\frac{(2n)!!}{(2n)!}\right)^2\frac{1}{2n+1}=\frac{(2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n)^4}{((2n)!)^2}\frac{1}{2n+1}=\frac{2^{4n}(n!)^4}{((2n)!)\cdot 2n}\cdot\frac{1}{1+1/2n}.$$

Звідси, використовуючи формулу Ейлера – Маклорена, властивості логарифмічної функції та останню рівність, запишемо:

$$\ln\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}=4n\ln 2+4\ln n!-2\ln(2n)!-\ln 2n-\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)=$$

$$=4n\ln 2+4C+(4n+2)\ln n-4n+4O\left(\frac{B_2}{2n}\right)-(4n+1)\ln 2-2C-(4n+1)\ln n+4n-2O\left(\frac{B_2}{4n}\right)-$$

$$-\ln 2-\ln n-\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)=-\ln 4+2C+3O\left(\frac{B_2}{2n}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right).$$

При $n\to\infty$, враховуючи (*), матимемо рівність

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\ln\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}=\lim_{n\to\infty}\left(-\ln 4+2C+3O\left(\frac{B_2}{2n}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right)=2C-\ln 4.$$

Звідси

$$C=\ln\sqrt{2\pi}.$$

Отже, формула Стірлінга остаточно набирає вигляду

$$\ln n!=\ln\sqrt{2\pi}+\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n-n+\sum_{k=2}^{m}(-1)^k\frac{B_k(k-2)!}{k!n^{k-1}}+O\left(\frac{B_{2m}}{m^2n^{2m-1}}\right).$$

Вправи для самостійного розв'язування.

1. Знайти суму H_{100} з точністю порядку $\frac{1}{100^5}$.

2. Знайти суму з точністю до четвертого вірного знаку $\sum_{x=1}^{n}\sin 2\pi\sqrt{x}$.

3. Обчислити з точністю порядку $O(n^{-3})$

а) $\sum_{x=1}^{n}\sqrt{x}$; б) $\sum_{x=1}^{n}e^{\sqrt{x}}$; в) $\sum_{x=2}^{n}\frac{x}{\ln x}$.

4. Знайти суму з точністю порядку $O(n^{-1})$ $\sum_{x=2}^{n}\ln^2(x!)$.

5. Обчислити $\ln 15!$ з 7 значущими цифрами.

Висновки

1. Розглянуто властивості скінченних сум та їх застосування при розв’язуванні вправ.
2. Описані штучні методи знаходження скінченних сум, які акумулюють різноманітний матеріал шкільного курсу математики та молодших курсів вищих педагогічних навчальних закладів.
3. Розкрита теорія зворотних рівнянь та проаналізована можливість зведення суми до рекурентного рівняння.
4. Детально висвітлено метод скінченних різниць як основний засіб обчислення скінченних сум.
5. Узагальнені деякі результати, зокрема, метод невизначених коефіцієнтів для сум, породжених многочленами та квазімногочленами.
6. Проаналізовані суми, породжені функціями, антирізниці яких виражаються в скінченному вигляді.
7. Розглянута можливість застосування ймовірнісних міркувань для знаходження сум.
8. Висвітлені методи наближеного обчислення скінченних сум та їх застосування.
9. Проведена оцінка залишкового члена асимптотичної формули при розв’язанні конкретних вправ.
10. Розв’язано близько 50 вправ різного рівня складності, які включають завдання шкільних та студентських олімпіад з математики.
11. Запропоновані вправи для самостійного розв’язування.
12. Подані методичні рекомендації щодо викладання пропонованого матеріалу в школах та педагогічних вузах.

Додатки

Д.1. Основні властивості чисел Стірлінга

Рекурентні співвідношення

$$S_{nk} = S_{(n-1)(k-1)} + kS_{(n-1)k};$$

$$s_{nk} = s_{(n-1)(k-1)} - (n-1)kS_{(n-1)k}.$$

Часткові випадки

$S_{n0} = s_{n0} = 0$ при $n \neq 0$;

$S_{n1} = 1$, для $n > 0$;

$S_{n2} = 2^{n-1} - 1,\ n > 0$;

$S_{nk} = s_{nk} = 0$ при $n < k$.

Перетворення степенів

$$x^n = \sum_{k=1}^{n} S_{nk} x^{(k)};$$

$$x^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} sS_{nk} x^k.$$

Деякі суми, пов'язані з числами Стірлінга

$$\sum_k (-1)^{n-k} s_{nk} S_{km} = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n. \end{cases};$$

$$\sum_k (-1)^{n-k} S_{nk} s_{km} = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n. \end{cases};$$

$$\sum_k C_n^k S_{km} = S_{(n+1)(m+1)};$$

$$\sum_k C_k^m s_{nk} = s_{(n+1)(m+1)};$$

$$\sum_k C_m^k k^n (-1)^{m-k} = m! S_{nm};$$

$$\sum_k \frac{s_{km}}{k!} = \frac{1}{n!} s_{(n+1)(m+1)}.$$

Д.2. Суми степенів чисел натурального ряду

$$1+2+3+\ldots+(n-1)=\frac{1}{2}n(n-1)$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2=\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)$$

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+(n-1)^3=\frac{1}{4}n^2(n-1)^2$$

$$1^4+2^4+3^4+\ldots+(n-1)^4=\frac{1}{30}n(n-1)(2n-1)\left(3n^2-3n-1\right)$$

$$1^5+2^5+3^5+\ldots+(n-1)^5=\frac{1}{12}n^2(n-1)^2\left(2n^2-2n-1\right)$$

$$1^6+2^6+3^6+\ldots+(n-1)^6=\frac{1}{42}n(n-1)(2n-1)\left(3n^4-6n^3+3n+1\right)$$

$$1^7+2^7+3^7+\ldots+(n-1)^7=\frac{1}{22}n^2(n-1)^2\left(3n^4-6n^3-n^2+4n+2\right)$$

$$1^8+2^8+3^8+\ldots+(n-1)^8=\frac{1}{90}n(n-1)(2n-1)\left(5n^6-15n^5+5n^4+15n^3-n^2-9n-3\right)$$

$$1^9+2^9+3^9+\ldots+(n-1)^9=\frac{1}{20}n^2(n-1)^2\left(n^2-n-1\right)\left(2n^4-4n^3-n^2+3n+3\right)$$

$$1^{10}+2^{10}+3^{10}+\ldots+(n-1)^{10}=\frac{1}{66}n(n-1)(2n-1)\left(n^2-n-1\right)\left(3n^6-9n^5+2n^4+11n^3+3n^2-10n-5\right)$$

$$1^{11}+2^{11}+3^{11}+\ldots+(n-1)^{11}=\frac{1}{24}n^2(n-1)^2\left(2n^8-8n^7+4n^6+16n^5-5n^4-26n^3-3n^2+20n+10\right)$$

Література

[1] Бевз Г.П.

Алгебра: Проб. підр. для 7-9 кл. серед. шк. – К.: Освіта, 1996. – 303с.

[2] Бевз Г.П.

Математика: Проб. підр. для 11 кл. серед. шк. – К.: Освіта, 1995. – 91с.

[3] Бекишев Г.А., Кратко М.І.

Підсумовування послідовностей. – К.: Вища школа, Головне видавництво, 1981. – 64с.

[4] Бродский Я.С., Слипенко А.К.

Производная и интеграл в неравенствах, уравнениях, тождествах. – К.: Выща шк. Головное изд-во, 1988. – 120с.

[5] Волков Ю.І., Войналович Н.М.

Елементи дискретної математики: Навчальний посібник. – Кіровоград: РВГ ІЦ КДПУ ім. В.Винниченка, 2000. – 176с.

[6] Волков Ю.І.

Додатні оператори. Наближення. Імовірність. – К.: НМК ВО, 1992. – 200с.

[7] Волков Ю.І., Лигун А.А., Капустян В.Е.

Специальные вопросы теории приближения и оптимального управления распределёнными системами. – К.: Выща школа, 1990. – 208с.

[8] Вороний О.М.

Кіровоградські олімпіади юних математиків (1991-2000 рр.): Методичний посібник. – Кіровоград: РВЦ КДПУ ім. В.Винниченка. – 140с.

[9] Вышенский В.А. и др.

Сборник задач киевских математических олимпиад. – К.: Выща школа, 1984. – 240с.

[10] Гарднер М.

Математические досуги. Пер. с англ. – М.: Мир, 1972. – 496с.

[11] Гельфонд А.О.

Исчисление конечных разностей. – М., 1967. – 376с.

[12] Гельфонд А.О.

Числення скінченних різниць. – К.: Науково-техн. вид-во України, 1935. – 215с.

[13] Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О.

Конкретная математика. Основание информатики. Пер. с англ. – М.: Мир, 1998.–703с.

[14] Демидович Б.П., Марон Ч.А., Шувалова Э.З.

Численные методы анализа. – М., 1967. – 368с.

[15] Колосов А.А. Книга для внекласного чтения по математике в старших класах. – М.: Госуд. учебно-педагогич. изд-во Министерствапросвещения РСФСР, 1963. – 436с.

[16] Корн Г., Корн Т.

Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука. Главная ред. физ. – мат. лит., 1977. – 832с.

[17] Крылов В.И.

Приближенное вычисление интегралов. – М.: Гос. изд-во физ. – мат лит., 1959. – 328с.

[18] Кушнир И.

Шедевры школьной математики в 2-х книгах. Книга 1. – К.: Асторта, 1995. – 576с.

[19] Марков А.

Числення скінченних різниць. – Харків: Науково-техн. вид-во України, 1936. –236с.

[20] Маркушевич А.И.

Возвратные последовательности. – М.: Гос. изд-во техн. – теорет. лит., 1951, - 48с.

[21] Садовничий В.А., Подколозин А.С.

Задачи студенческих математических олимпиадных задач по математике. – М.: Наука, Главная ред. физ. – мат. лит., 1978. – 208с.

[22] Садовничий В.А., Григорьян А.А., Конягин С.В.

Задачи студенческих математических олимпиад. – М.: Изд-во Мос. ун-та, 1987. – 310с.

[23] Феллер В.

Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х томах. Т. 1. Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 528с.

[24] Фихтенгольц Г.М.

Курс дифференциального и интегрального исчисления, том II. – М., 1969. – 800с.

[25] Шефтель З.П.

Теорія ймовірностей: Підручник. – 2-ге вид., пер. і допов. – К.: Вища шк, 1994. – 192с.

[26] Шкіль М.І. та ін.

Алгебра і початки аналізу: Проб. підр. для 10-11 кл. серед. шк. – К., 1995. – 60с.