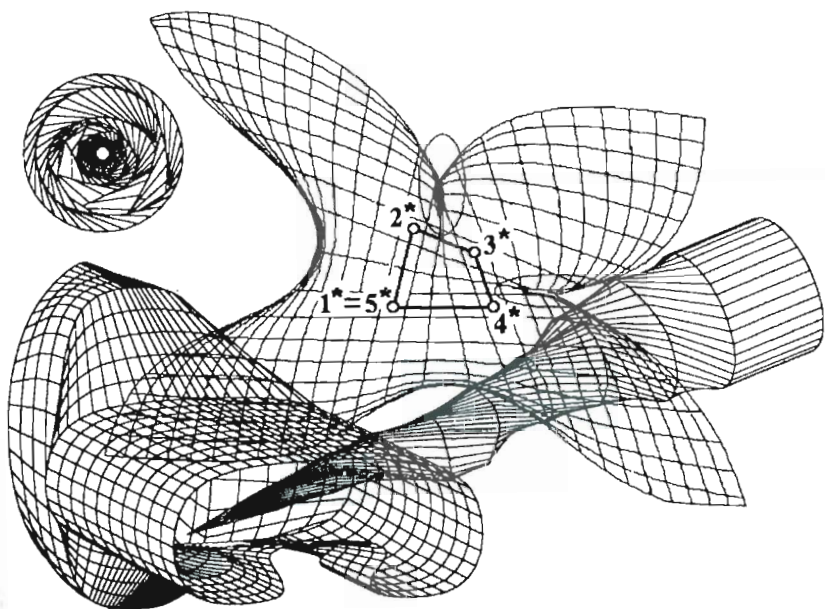


Ю. О. ДОРОШЕНКО

ПОЛІТКАНИННІ  
ПЕРЕТВОРЕННЯ  
У  
ДЕФОРМАТИВНОМУ  
КОНСТРУЮВАННІ  
ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ



УДК 515.2:658.5:681.5

Дорошенко Ю.О.  
Політканинні перетворення у деформативному  
конструюванні геометричних об'єктів. – К.: Педагогічна  
думка, 2001. – 390 с.

У монографії описуються теоретичні основи деформативного конструювання геометричних об'єктів та політканинних перетворень простору. Розроблено і практично апробовано інструментарій нового напрямку керованого синтезу та цілеспрямованої варіації форми кривих ліній і поверхонь відповідно до їх функціонального призначення.

Для фахівців у галузі прикладної геометрії та комп'ютерних графічно-інформаційних технологій.

Рецензенти

доктор технічних наук, професор  
Л.М.Куценко  
(Академія пожежної безпеки України);  
доктор технічних наук, професор  
М.І.Яковлев  
(Національна академія образотворчого мистецтва  
і архітектури);  
доктор технічних наук, доцент  
Є.В.Мартин  
(Національний університет  
"Львівська політехніка")

*Затверджено до друку вченою радою  
Інституту педагогіки АПН України  
(протокол №9 від 11 жовтня 2001 року)*

УДК 515.2:658.5:681.5

ISBN 966-644-009-1

© Ю.О.Дорошенко, 2001

*Присвячую світлій пам'яті  
мого батька Дорошенка  
Олександра Семеновича*

## ПЕРЕДМОВА

Ця монографія є описом результатів дослідження автора, що стало основою його докторської дисертації "Комп'ютерні методи деформативного конструювання геометричних об'єктів на основі політканинних перетворень".

Як видно з назви дисертації, це дослідження належить галузі "Прикладна геометрія" та поєднує в собі такі напрямки: *деформативне конструювання; геометричне моделювання об'єктів, процесів і явищ; політканинні* (як різновид геометричних) *перетворення та комп'ютерні графічно-інформаційні технології*. Всі ці напрямки, будучи загалом самостійними, у даному дослідженні являють собою єдине ціле, своєрідну систему теоретичних положень та інструментальних засобів, призначених для розв'язання певного класу задач геометричного моделювання.

За останнє десятиліття видань аналогічного спрямування й змістовного наповнення в Україні майже не спостерігалось. Сподіваємось, що ця книжка достойно заповнить одну з прогалин прикладної геометрії й сприятиме становленню й розвитку української наукової школи з означеної галузі знань.

Автор низько вклоняється своєму першому науковому Учителю – Анатолію Володимировичу Павлову за його сувору, проте справедливу школу життя та щиро дякує найкращому наставникові, колезі і другу Юрію Івановичу Бадаєву, поруч з яким довелося пройти понад половину життя. Без їхньої уваги, активної, доброзичливої й вимогливої участі та постійної допомоги не відбулось би становлення іще одного науковця-геометра, не з'явилася б і ця книжка.

Разом з тим, слід із великою вдячністю згадати й Вільгельма Бляшке та Віталія Самійловича Файна, з чиїх тоненьких, проте бездонно глибоких змістовно, книжечок ("Введение в геометрию тканей" та "Алгоритмическое моделирование формообразования") взяло початок пропонуване в цій монографії дослідження.

Автор висловлює особливу вдячність рецензентам за ознайомлення з рукописом та за висловлені ними зауваження і побажання, що сприяли покращанню матеріалу книжки. Щира подяка також всім друзям і колегам за їх спілкування й всіляку підтримку автора в різні часи.

Окрема подяка й приземний уклін Василеві Мадзігону – Педагогу, Керівникові, Людині.

Маю надію, що дана монографія буде з увагою сприйнята спеціалістами як за новизною одержаних результатів, так і з перспективою їх практичної реалізації, узагальнень й подальшого розвитку.

Вересень 2001 року

Автор

## ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ І СКОРОЧЕНЬ

АСТПВ – автоматизована система технологічної підготовки виробництва

БКП – базисна координатна площина

ГМ – геометрична модель

ГМО – геометрична модель об'єкту

ГМРЛП – геометрична модель розповсюдження лісової пожежі

ГМТ – геометричне місце точок

ГО – геометричний об'єкт

ГП – геометричне перетворення

ДК – деформативне конструювання

ДКС – динамічна координатна сітка

ДПК – дискретно-подана крива

ЕОМ – електронно-обчислювальна машина

К2П – крива другого порядку

К3П – крива третього порядку

КБЛ – координатна базисна лінія

КБПТ – координатний базис політканини

КГІТ – комп'ютерні графічно-інформаційні технології

КП – координатний простір

КС – комп'ютерна система

ММ – математична модель

ММГО – машинна модель геометричного об'єкту

МФЗЛ – метод функцій змішання Лаймінга

ОЕ – обчислювальний експеримент

ПЗ – програмні засоби

ПК – персональний комп'ютер

ПТЗ – програмно-технічні засоби

ППП – пакет прикладних програм

САПР – система автоматизованого проектування

САПР/ТПВ – інтегрована система автоматизованого проектування та технологічної підготовки виробництва

СК – система координат

ЧПК – числове програмне керування

$\beta_i, i=1, \dots, p$  – політканинна координата точки-прообраза відносно  $i$ -ї КБЛ КБПТ ГО-прообраза

$\varphi_i, i=1, \dots, p$  – політканинна координата точки-образа відносно  $i$ -ї КБЛ КБПТ ГО-образа

## ВСТУП

Головним призначенням та кінцевим результатом будь-яких досліджень у галузі прикладної геометрії є створення ефективних методів і на їх основі – дієвих засобів розв'язання різноманітних задач практичної діяльності людини із застосуванням геометричного моделювання об'єктів, процесів і явищ. Тобто, теоретичні результати прикладної геометрії повинні мати практичне значення й конкретне застосування.

Оскільки геометричне моделювання ґрунтується на геометричних моделях певного виду й призначення, то розробка нових, адекватних розв'язуванню задач методів і засобів цілеспрямованого створення достовірних геометричних моделей об'єктів, процесів і явищ був, є й буде одним із пріоритетних напрямків наукових досліджень геометричного спрямування.

Розробка комп'ютерних моделей геометричних об'єктів складної криволінійної форми традиційно належить до найбільш трудомістких процесів, що мають місце у багатьох галузях народного господарства. Для створення таких моделей нині використовується досить широкий спектр різноманітних математичних способів і методів. Проте неповне задоволення задіяним математичним апаратом вимог, що ставляться до нього конструкторами під час розв'язання різноманітних практичних задач, спонукає науковців-геометрів до розробки нового, більш досконалого інструментарію. Нині до пріоритетних вимог конструктивного плану прийнято відносити: зручність і простоту керування процесом створення моделі геометричного об'єкту, передбачуваність одержуваних результатів, можливість зорового відстеження зміни форми ГО внаслідок заданого впливу, відсутність необхідності у досконалому опануванні конструктором математичного апарату, реалізованого у використуваному програмному забезпеченні.

На виконання певної частини цих вимог й спрямовується метод деформативного конструювання ГО на основі політканинних перетворень.

Нині, в умовах загальної інформатизації усіх сфер життєдіяльності людини, теоретичні досягнення прикладної геометрії знаходять своє практичне втілення у більшості новостворюваних комп'ютерних систем різноманітного застосування й призначення. Як правило, це стосується генерації комп'ютерних моделей геометричних об'єктів (реально існуючих у природі чи уявних), видозміни їх форми, певного опрацювання, зокрема, візуалізації чи об'єднання з іншими об'єктами, використання як першоджерел геометричної інформації для створення різноманітних технологічних процесів та зберігання у вигляді комп'ютерних файлів визначеної інформаційної структури.

Одним із наслідків загального поширення інформаційних технологій є значне розширення кола користувачів комп'ютерних засобів, котрі більшою або меншою мірою пов'язані з опрацюванням геометричної (графічної) інформації. З огляду на сказане, серед таких користувачів закономірно переважатиме частка тих, хто недостатньою мірою оволодів комп'ютерними технологіями, не має стійких навичок роботи за комп'ютером у середовищі спеціалізованих комп'ютерних систем та не опанував чи взагалі необізнаний з математичним апаратом, ре-

лізованим у використовуваному програмному забезпеченні. Визначальними рисами сучасного етапу розвитку методології та інструментарію прикладної геометрії є: новостворювані методи не повинні залежати від виду попереднього чи підсумкового задання (аналітичного, графічного, графо-аналітичного, функціонального тощо) геометричного об'єкту, а система керування (як певний інструментарій) варіацією форми ГО повинна бути простою, доступною, мати геометричну (графічну) інтерпретацію на рівні найпростіших примітивів, а сукупність дій користувача (як певних впливів або збурювачів деформації) щодо зміни форми об'єкта з метою максимального її наближення до бажаної повинна відповідати звичній, усталеній роботі звичайного (традиційного) конструктора, включати в себе найхарактерніші правила й інструментарій його роботи за некомп'ютеризованим знаряддям (кульманом), мати інтуїтивно, підсвідомо зрозумілий характер й дозволяти прогностичну попередню оцінку результату реалізації заданого керуючого впливу.

На цей час існує значна кількість способів конструювання і моделювання ГО, в яких деякою мірою реалізовано керування формою таких об'єктів. Проте всі вони орієнтуються на певне математичне задання опрацьовуваних ГО, у більшості своїй дозволяють впливати лише на форму лінійних складових опису їх форми, характеризуються помітною складністю, а то й неможливістю графічної інтерпретації параметрів керування формою, мають обмежені можливості щодо побудови дієвого, "дружного" інтерфейсу при програмній реалізації, визначаються обмеженою сферою застосування та у своїй більшості вимагають наявності в користувача досить високої математичної підготовки.

Між тим, сучасна практика розв'язання різноманітних задач, пов'язаних з геометричним моделюванням, вимагає наявності багатofункціональних програмних засобів, що реалізують дієві універсальні алгоритми, дозволяють у стислі терміни виконати формалізацію поставленої задачі й орієнтовані на роботу з ними фахових (у своїй предметній галузі) спеціалістів, що не мають ґрунтовної підготовки з математичного (геометричного) моделювання, застосування комп'ютерних засобів та мінімально обізнані з використовуваним математичним апаратом.

Тому на часі комплексне розв'язання зазначеної вище проблеми, що передбачає розробку концептуальних основ деформативного конструювання, теоретичне обґрунтування, створення, апробацію працездатності та визначення меж застосування математичного апарату політканинних перетворень, розробку ефективних способів глобальної та локальної деформації геометричних об'єктів, визначення структури та змістовного наповнення моделей одно- та двовимірних ГО із застосуванням політканинних перетворень, розробку способів конструювання та моделювання ГО відповідно до зазначених вище підходів, практичну реалізацію основних теоретичних результатів та розробленого математичного, алгоритмічного й методичного забезпечення у вигляді проблемно-орієнтованих пакетів прикладних програм та апробацію працездатності створеної теорії і програмного забезпечення під час розв'язання визначеного кола реальних практичних задач.

## 1. ПРОБЛЕМА КЕРОВАНОЇ ЗМІНИ ФОРМИ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

Однією з найбільш важливих і найскладніших задач прикладної геометрії є синтез геометричних об'єктів (реально існуючих або уявних, віртуальних) різноманітного виду й призначення. При цьому, з усіх проблем, сукупних вирішенню вказаної багатofаспектної задачі, перед веде проблема керованого синтезу й цілеспрямованої зміни форми ГО, що відповідає заданим динамічним, естетичним, конструктивним, ергономічним, функціональним та іншим вимогам. Пріоритетність зазначених вимог і їх конкретне вираження визначається наявними умовами розв'язуваної задачі.

Отже, завданнями цього розділу є:

- висвітлити сучасний стан проблеми, винесеної до заголовку розділу;
- зіставити поняття та змістове наповнення визначника ГО та його геометричної моделі з метою виділення з їх складу керуючого апарату, що має геометричну природу й допускає просту наочну інтерпретацію;
- обґрунтувати доцільність створення комп'ютерно-орієнтованих методів конструювання ГО, визначальною особливістю яких є організація процесів синтезу й варіації форми ГО за допомогою "геометризованого" керуючого апарату;
- розглянути поняття "простір" й показати можливість керованої варіації форми ГО шляхом деформації охоплюючого простору із застосуванням певного апарату геометричних перетворень як практичного реалізатора заданої деформації.

### 1.1. Геометрична модель

як результат конструювання або моделювання ГО

Відомо, що загальна задача синтезу ГО (поверхонь і кривих ліній) має два самостійних напрямки: *проектування (конструювання) та моделювання*. Кожен з цих напрямків розв'язання єдиної задачі синтезу ГО характеризується власними наборами підходів, прийомів, способів, методів, математичним, зокрема геометричним та графо-аналітичним, апаратом та сферою застосування (колом розв'язуваних задач). Проте кінцевим результатом як проектування, так і моделювання ГО є його геометрична модель.

Під терміном "*геометрична модель*" розумітимемо окремий різновид математичної моделі, що об'єднує в собі поняття "*графічна модель*" та "*аналітична модель*" та використовується для багаторазового взаємного перетворення неперервної й дискретної графічної інформації у відповідні аналітичні аналоги і навпаки. Конкретизуємо поняття "геометрична модель".

Для цього спочатку наведемо найбільш узагальнююче означення *математичної моделі* (ММ): "ММ – це система математичних відношень, яка описує об'єкт, процес чи явище, що вивчається" [286]. Стосовно класу прикладних моделей, якими оперує прикладна геометрія, відоме також таке означення математичної моделі [64]: "ММ – це клас абстрактних (символічних) математичних об'єктів і відношень між цими об'єктами".

Математичне визначення моделей, що відображають геометричні властивості реальних об'єктів і процесів (тобто власне геометричних мо-



делей), ґрунтується на введенні у деякому метричному просторі системи координат, припустимих перетворень простору, множини елементарних ГО-точок та множини складених ГО, зв'язаних з точками певною сукупністю відношень й таких, що являють собою визначені на деякій множині області виділеного простору функції точок.

Геометричні об'єкти, як відомо [288], характеризуються *формою, структурою* і *розмірами*. Тому подальшим розвитком зазначених вище означень може бути наступне: "Математична модель геометричного об'єкта (ММГО) – це формалізований опис структури, форми і розмірів об'єкта у вигляді рівнянь, таблиць даних, текстів, що побудовані за визначеними правилами". Наведене словосполучення "математична модель геометричного об'єкта" у подальшому викладенні замінимо його змістовним аналогом – "геометрична модель".

Отже, математична модель у загальному вигляді має виключно аналітичне визначення або ж являє собою опис абстрактного об'єкта, тобто є поданням об'єкту у вигляді визначенням чином організованої структури знаків, числових даних, слів (вербальної інформації) та їх відношень – комплексу рівнянь та умов їх розв'язання. Разом з тим, геометрія – це загальна наука про просторові форми. Геометрія вивчає закони утворення різноманітних форм та закони і процеси керування формоутворенням, вивчає та досліджує властивості форм, що дозволяє відокремити одну форму від другої або ж встановити їх спільність за деякою сукупністю визначеної групи ознак. Математичні, тобто суґубо аналітичні, методи являють собою далеко не єдиний і зовсім не завжди найліпший апарат розв'язання більшості практичних інженерних задач, пов'язаних з геометричними об'єктами. У геометрії широко застосовуються різноманітні синтетичні, проєктивні, диференціально-геометричні, графічні, евристичні, комбінаторні, логічні методи, методи перетворень простору, теорія конгруенції та багато інших. З певністю можна зазначити, що математика у її чистому, тобто виключно аналітичному вигляді займає у геометрії далеко не провідну роль. Особливо це проявляється під час опрацювання складених геометричних об'єктів складних технічних форм і структур. Отже, ґрунтуючись на сказаному вище, можна зробити висновок, що геометрична модель об'єкта є поняттям більш охоплюючим, узагальнюючим і більш складним, ніж математична модель об'єкта.

Вище вже зазначалось, що *геометрична модель є узгодженим поданням графічної та аналітичної моделей*, які взагалі є антиподами одна одній. Як відомо, геометричне моделювання спочатку реалізовувалось виключно за допомогою зображень. Зображення є найстарішим способом передачі геометричних властивостей об'єктів. Подальшим розвитком теорії зображень стала графічна модель об'єкта, що є найбільш наочним носієм інформації про форму об'єкта і являє собою визначенням чином організовану структуру (систему) проєкційних зображень і їх відношень (зокрема, креслень і правил їх читання).

Необхідність розв'язання нових технічних задач на основі сучасних трудомістких математичних методів у авіа-, автомобіле-, суднобудуванні, архітектурі, енергетичному й хімічному машинобудуванні тощо та поява електронно-обчислювальних засобів автоматизації обчислень сприяли подальшому розвитку й вдосконаленню методів та засобів геометрично-

го моделювання об'єктів, що призвело у свою чергу до появи нового апарату конструювання й дослідження складних технічних форм. Цей апарат рівною мірою використовував як графічні, так і аналітичні методи й тому отримав назву графо-аналітичного. З часом змінювались способи задання графічної інформації, перетворення її у аналітичну й навпаки, з аналітичної у графічну, змінювались і вдосконалювались математичні методи, покладені в основу геометричного моделювання, проте графо-аналітична сутність цих процесів залишалась незмінною. І з певністю можна стверджувати, що й надалі не зміниться, зважаючи на природу об'єкту моделювання, існуючого набору технічних засобів, що використовуються у цьому процесі, й, насамкінець, на обов'язкову присутність рівноправного учасника і споживача кінцевого результату процесів синтезу форми ГО – людини.

Дійсно, основні властивості будь-якого геометричного об'єкта визначаються його формою, що містить перш за все графічну суть, електронно-обчислювальна техніка працює лише з числовою інформацією за жорстко визначеними алгоритмами (логічними побудовами), тобто вимагає виключно аналітичного подання геометричних (у тому числі й графічних) об'єктів; а людині, тим часом, найзвичніше мати справу з зоровими образами, що несуть графічну інформацію. Зважаючи на те, що зображення мають найвищу інформативність, а людині властиво найшвидше обробляти й аналізувати зорові образи, більша частина вхідної інформації про геометричні об'єкти повинна мати графічну (читай – зорову) інтерпретацію.

Для будь-якого ГО можна визначити деяку сукупність незалежних умов, що однозначно задають цей об'єкт, тобто дозволяють встановити належність будь-якої точки простору цьому ГО. Таку сукупність незалежних умов називають *визначником геометричного об'єкту*. Цей термін за своєю суттю є повністю тотожним терміну "геометрична модель" й своєю появою та існуванням зобов'язаний нарисній геометрії як науці, що першою стала розв'язувати задачі створення й дослідження моделей ГО [177, 302]. До визначника ГО входять *геометричні фігури* (або базові геометричні об'єкти) та *визначена послідовність дій*, за якими з цих геометричних фігур може бути утворений заданий геометричний об'єкт. Базовими вважаються геометричні об'єкти, котрі у процесі вирішення конкретної прикладної задачі розглядаються як незалежні. Розрізняють такі базові геометричні об'єкти – точки; одновимірні об'єкти – лінії (плоскі і просторові); двовимірні об'єкти – поверхні та тривимірні об'єкти – тіла. Послідовність дій, за допомогою якої здійснюється побудова цілісного ГО з окремих геометричних фігур (базових ГО) називається, як відомо, *алгоритмом відтворення цього ГО*.

Таким чином, *визначник ГО*, а, отже, і геометрична модель об'єкта, складається із двох частин: *геометричної та алгоритмічної*. Так, за [303] визначник будь-якого ГО має таку структурну формулу:

$$\Phi(\Gamma): [A],$$

(1.1)

де  $\Gamma$  – геометрична частина,  $[A]$  – алгоритмічна частина. Природно, що для того, щоб визначник задавав конкретний ГО, необхідно кожен його частину наповнити конкретним змістом.

Кількісно форма всіх ГО характеризується *параметрами*. Останні є незалежними величинами, що дозволяють виділити єдину фігуру (або підмножину фігур) з деякої множини фігур, які відповідають одному й тому ж

самому визначенню. Процес виділення *сукупності параметрів* (*параметризація ГО*) є важливою частиною геометричного моделювання. Загалом опис ГО містить параметри двох типів: форми та положення. *Параметри форми* характеризують тільки форму і розміри ГО. Ці параметри не змінюють своїх значень при зміні положення фігури у просторі – рухові, або мовою геометрії описують ГО з точністю до руху. *Параметри положення* не змінюють форму і розміри ГО й характеризують лише його положення у просторі (орієнтацію).

Параметризація визначеного ГО здійснюється відносно деякої системи координат. *Параметризація форми* виконується у системі координат, котра жорстко зв'язана з ГО й переміщується разом з ним. Таку параметризацію зовуть ще *внутрішньою*. *Параметризація положення* ГО виконується у зовнішній системі координат, що є незалежною від ГО. Таку параметризацію зовуть *зовнішньою*. Сукупну кількість параметрів форми та параметрів положення ГО прийнято називати *параметричним числом ГО*. Важливу роль у процесі визначення параметричного числа конкретного ГО відіграють *геометричні умови* – геометричні відношення між елементами всередині одного ГО, або між елементами одного ГО і елементами другого ГО.

## 1.2. Можливості керування формою ГО, закладені у структурі геометричної моделі

Вище виконано загальний розгляд таких категорій, як "математична модель", "геометрична модель", "визначник геометричного об'єкту" без врахування особливостей їх конкретної реалізації і технології практичного застосування для вирішення різноманітних задач у різних сферах людської діяльності. У сучасних умовах названі категорії орієнтовані виключно на машинну реалізацію з максимальним використанням функціональних можливостей комп'ютерної техніки, математичного й програмного забезпечення, застосуванням інтерактивного багатотераційного і багатоваріантного режиму пошукової роботи користувача. Тому, враховуючи всю подану вище інформацію та зважаючи на той факт, що об'єктом моделювання виступатиме виключно геометричний об'єкт, доповнимо наведені означення ще двома. **Геометричною моделлю об'єкта** (ГМО) називатимемо сукупність числових констант і алгоритмів, що однозначно визначають положення будь-якої точки ГО у просторі. **Машинною моделлю геометричного об'єкта** (ММГО) вважатимемо геометричну модель об'єкта, реалізовану у вигляді числових масивів і комп'ютерних програм, що записані на носіях довгострокового збереження інформації й повністю підготовлені для використання в існуючих комп'ютерних програмно-технічних системах різноманітного призначення (САПР, АСТПВ, АСНД, АСУ, АСУТП тощо).

Таким чином, *геометрична модель* будь-якого об'єкта складається з двох частин: *геометричної* і *алгоритмічної*. Ці обидві складові певним чином впливають на форму ГО, що моделюється. Але цей вплив не однако-вий. Більшою гнучкістю стосовно реалізації керованої зміни форми ГО виділяється геометрична частина геометричної моделі об'єкту. Це пов'язано із значною трудомісткістю зміни алгоритмічної частини ГМО. Більше того, геометрична частина ГМО може бути представлена у вигляді сукупності зоро-

вих образів, що є однією з головних умов створення комфортного середовища діяльності людини-оператора, має найбільше інформаційне навантаження (найвищу інформативність), забезпечує звичний режим роботи користувача й найбільше відповідає психологічним особливостям творчої діяльності людини. Останнє проявляється в процесі пошукового створення оптимальної (бажаної) форми ГО на основі інтерактивної взаємодії конструктора з комп'ютерними програмно-технічними засобами на рівні зорових образів. Отже, алгоритмічна можливість стосовно керованої зміни форми ГО. Більша ж частина можливостей стосовно керованої зміни форми (синтезу) ГО з врахуванням психологічних аспектів творчої діяльності людини міститься у геометричній частині ГМО.

*Параметри форми і параметри положення* ГО відносяться до *геометричної частини* ГМО. Згідно з [225] параметр керування формою ГО – це "розкріплений" параметр форми, що характеризує можливість варіювання форми об'єкта у заданому місці й у визначеному діапазоні. Форма об'єкта може визначатися комплексом різноманітних параметрів форми у різних сполученнях. Рівняння будь-якого ГО відносно тривимірної декартової системи координат може бути записано у такому вигляді:

$$F(x, y, z, \lambda, \mu, \nu, \dots, \xi) = 0, \quad (1.2)$$

де коефіцієнти  $\lambda, \mu, \nu, \dots, \xi$  зовуться *параметрами керування формою ГО*. Зміна числових значень цих параметрів призводить до зміни форми ГО, що дозволяє в процесі системної цілеспрямованої їх зміни досягти бажаного результату – необхідної (або близької до неї) форми заданого ГО.

Виділені у (1.2) параметри керування формою ГО мають аналітичну природу. Тому одним з головних завдань задачі інтерактивного пошуку оптимальної форми ГО є "*геометризація*" параметрів керування формою ГО. Тобто, для будь-якого ГО необхідно навчитися визначати геометричні аналоги кожного з функціональних параметрів (коефіцієнтів рівняння (1.2) конкретного виду), або їх визначених сукупностей. При цьому знайдені геометричні аналоги повинні допускати просту графічну інтерпретацію і дозволяти нескладним чином виділяти сукупності простих геометричних (графічних) об'єктів, керована зміна форми та/чи взаємного розташування яких дозволяла б адекватно змінювати функціональні параметри форми створюваного ГО. Останнє дозволить користувачеві здійснювати керований синтез форми ГО у процесі інтерактивної взаємодії з ЕОМ на рівні простих звичних зорових образів без необхідності глибокого опанування задіяного математичного апарату і знання впливу кожного з функціональних параметрів на форму ГО.

Геометричний аналог сукупності функціональних параметрів керування формою ГО і його графічний ілюстратор є *геометричним апаратом керування формою ГО* і повинен складатись з простих геометричних об'єктів (елементів): точок, прямих, ламаних, простих геометричних фігур (трикутник, прямокутник, коло, еліпс, тощо), площин, простих поверхонь (сфера, еліпсоїд, призма, піраміда, тощо). Керування формою ГО у цьому разі здійснюється цілеспрямованою зміною конфігурації керованого геометричного апарату, що зумовить адекватну зміну форми (як деформацію) створюваного ГО. Природно, що зв'язок між функціональними параметрами керування формою ГО і їх геометричним аналогом здійснюється на основі встановлених функціональних залежностей. В ре-

зультаті реалізації вказаної системи дій оператор впливає на форму ГО опосередковано, через зміну конфігурації керуючого апарату, що значно зручніше, простіше, не змінює звичний режим роботи й дозволяє людині взаємодіяти з ЕОМ на рівні простих зорових образів. Останнє також сприяє значному підвищенню комфортності й продуктивності такої роботи.

### 1.3. Можливості існуючих методів конструювання щодо керованої варіації форми ГО

Описаний вище підхід до керованої зміни форми ГО не є абсолютно новим. Він доволі відомий і широко застосовується у конструкторській та дизайнерській практиці. Проте в якості окремого узагальнюючого самостійного напрямку цілеспрямованого конструювання ГО як керованої зміни форми їх визначених прототипів внаслідок зміни конфігурації керуючого апарату, що має геометричну природу і піддається простій графічній інтерпретації, досі ще не виділявся. На підтвердження сказаного наведемо два загальновідомі приклади.

**Перший.** Задання обводів методом кривих другого порядку. При цьому, як відомо, кожна ланка обводу визначається кривою другого порядку (K2П) у інженерному варіанті задання, складовими якого є характеристичний трикутник ABC та числове значення дискримінанту  $f$  кривої (рис. 1.1, а). Геометричними елементами керуючого апарату конструювання K2П є вершини характеристичного трикутника (точки A, B, C) та точка F на медіані трикутника ABC, проведеної з вершини B. Як видно, керуючий апарат зміни форми K2П має просту графічну інтерпретацію, що дозволяє реалізувати процес конструювання K2П на рівні звичних зорових образів. Процес керування полягає у зміщенні вершин трикутника ABC у будь-яких довільних напрямках і заданні положення точки F K2П на медіані BE. Тобто, керуючими геометричними елементами виступають чотири точки A, B, C, F, серед яких довільність пересування точки F обмежена відрізком BE.

Фіксоване положення керуючих точок A, B, C, F визначає конкретну форму K2П за функціональною залежністю, записаною у векторно-параметричному вигляді:

$$R_T = R(t) = \frac{R_A + R_B t + R_C \gamma t^2}{1 + t + \gamma t^2}, \quad (1.3)$$

де  $R_T$  – радіус-вектор поточної точки T K2П,  $R_A, R_B, R_C$  – радіуси-вектори вершин характеристичного трикутника ABC,  $t$  – параметр поточної точки K2П, у межах трикутника  $0 \leq t \leq \infty$ , а  $\gamma$  пов'язаний з дискримінантом  $f$  за такою залежністю:

$$\gamma = \left( \frac{1-f}{2f} \right)^2, \quad f = \frac{|FE|}{|BE|} \quad (1.4)$$

Параметр  $t$  для зручності обчислень часто перевизначають параметром  $U$ , що визначає відносну проекцію поточної точки T K2П на хорду AC паралельно медіані BE:

$$t = \frac{U}{1-U}, \quad U = \frac{l}{L} \quad (1.5)$$

При такому способі задання, як відомо, прями AB, BC та AC визначають дотичні у точках K2П A, C та F відповідно й використовуються для побудови гладких складених обводів з сукупності дуг-K2П.

**Другий.** Задання обводів у вигляді поліноміальних кривих у формі Бернштейна-Без'є. Крива у формі Бернштейна-Без'є, як відомо, визначається характеристичною ламаною, що зветься полігоном, а її вершини – репером (рис. 1.1, б). Модифікація, тобто зміна форми такої кривої, полягає у переміщенні вершин ламаної у потрібних напрямках. При цьому, результуюча крива буде неухильно слідувати за вершинами, що переміщуються. Виділення вказаного реперу або полігону як керуючого апарату зміни форми кривої, що має явно виражену геометричну природу і доволі просту графічну інтерпретацію, пов'язано з ім'ям відомого математика П.Без'є (P. Bezier) [321, 322].

Без'є виконав узагальнення поліномів Бернштейна на векторнозначні функції й запропонував аналітичну форму запису поліноміальної кривої у вигляді:

$$R = R(U) = \sum_{i=0}^n \frac{n!}{(n-i)!i!} U^i (1-U)^{n-i} R_i \quad (1.6)$$

де  $R_i, i=0,1,\dots,n$  – радіус-вектори  $(n+1)$  вершин узагальнюючої характеристичної ламаної (полігона),  $U$  – параметр поточної точки кривої, у межах кривої (полігона)  $0 \leq U \leq 1$ . Як видно, рівняння (1.6) дозволило виділити як керуючі параметри форми поліноміальної кривої  $n$ -го порядку  $(n+1)$  точку, послідовне з'єднання яких утворює характеристичну ламану, названу  $n$ -ланковою ламаною Без'є. Таким чином, ламана Без'є є своєрідним засобом керування формою відповідної кривої Без'є. Розмірність ламаної Без'є (кількість ланок) однозначно визначає степінь полінома, тобто порядок кривої Без'є.

Виділений керуючий апарат виявився досить ефективним у інтерактивних програмних засобах багатоваріантного конструювання ГО, що задаються на основі кривих Без'є. Ця ефективність зумовлюється видом аналітичного запису (1.6) і впливаючими з нього властивостями відповідної кривої, як-то:

- 1) крайні точки кривої Без'є збігаються з крайніми вершинами полігона. Всі інші точки реперу у загальному випадку не належать кривій Без'є;
  - 2) нахил дотичних до кривої Без'є у крайніх точках реперу збігається з нахилом відповідно першої й останньої ланок полігону;
  - 3) крива Без'є цілком знаходиться всередині опуклої оболонки, що утворюється ламаною Без'є;
  - 4) крива Без'є досить добре відображає істотні риси (характер) ламаної Без'є. Проте відомо, що із зростанням степеня полінома послаблюється наочний зв'язок між формою кривої Без'є та її характеристичною ламаною. Це в свою чергу ускладнює процес конструювання кривої потрібної форми.
- Найширше застосування для задання ГО знайшли кубічні параметричні криві Без'є. Це зумовлюється тим, що такі криві забезпечують завдання обводів гладкістю другого порядку (неперервна зміна кривини, що є необхідною умовою завдання так званих динамічних обводів), надають можливість визначення кривої з точкою перетину й мають найнижчу складність завдання серед подібних кривих. Кубічна крива Без'є



визначається триланковим незамкненим або чотириланковим замкненим полігоном. У обох випадках репер включає чотири точки – A, B, C, D (рис. 1.1, в).

Слід зазначити, що кубічна крива Без'є належить до загального класу кривих третього порядку (КЗП). Розгляду питань генерації й дослідження властивостей КЗП з метою застосування їх у різноманітних задачах геометричного моделювання присвячена докторська дисертація Ю.І.Бадаєва [18].

Використовуючи метод синтезу векторно-параметричних рівнянь на основі проєктивних перетворень, ним отримані різні варіанти рівнянь КЗП, що визначають по суті різні за формою криві. Найбільш узагальнюючим визначено рівняння нерациональної кривої третього порядку (НРКЗП), яка за певних умов (обнуління двох аналітичних параметрів) перетворюється у рациональну криву третього порядку (РКЗП). Цікаво, що обидві криві (НРКЗП та РКЗП) мають абсолютно однакові полігони (репери) й за певних значень параметрів у аналітичних рівняннях визначають будь-яку криву третього порядку, у тому числі й кубічну криву Без'є [16]. Рис. 1.1, в демонструє відмінність форми НРКЗП й РКЗП за умови спільного полігону. Таким чином встановлюються більш узагальнюючі властивості полігону як керуючого апарату зміни форми кривої. Тобто, конкретна форма кривої у заданому полігоні визначається ще й видом задіяного рівняння аналітичного подання кривої.

Наведені приклади, враховуючи психологічні аспекти інтерактивного конструювання просторових ГО [13], наочно й досить переконливо демонструють переваги зазначеного вище підходу до створення апарату керованого синтезу ГО, що включає визначену сукупність простих геометричних елементів і певний набір правил (певну свободу дій) щодо зміни їх взаємного розташування (орієнтації) з метою отримання ГО бажаної форми.

Розглянуті способи керованого синтезу одновимірних криволінійних обводів на основі методу кривих другого порядку та поліноміальних кривих у формі Бернштейна-Без'є широко застосовуються для конструювання і задання незакономірних технічних поверхонь як двовимірних криволінійних обводів. Наочна ілюстрація суті такого конструювання із

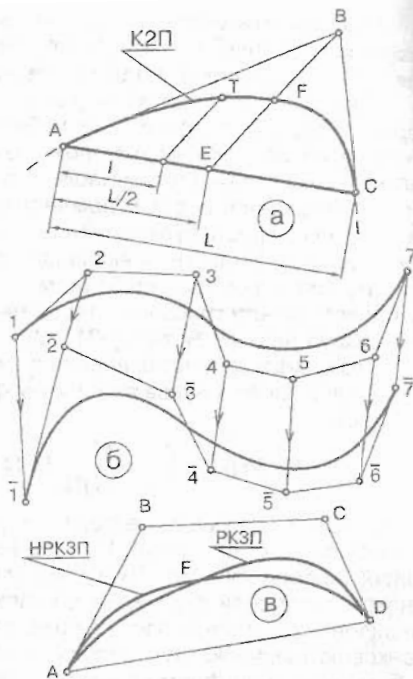


Рис. 1.1. Керуючі апарати зміни форми: а) кривої другого порядку у інженерному варіанті задання; б) поліноміальної кривої у формі Бернштейна-Без'є; в) кубічної кривої Без'є

застосуванням спеціалізованих реперів (полігонів) наведена на рис. 1.2. При цьому, рис. 1.2, а демонструє керуючий апарат конструювання простого куска поверхні четвертого порядку на основі метода К2П. Твірні і напрямні, що можуть переходити одна в одну, задані кривими другого порядку [213]. Рис. 1.2, б наводить керуючий апарат у вигляді характеристичного многогранника, вершини якого визначають відповідний репер, що задає форму відсіку (порції) поверхні шостого порядку за способом Без'є. Твірні і напрямні такої поверхні можуть попарно змінювати своє функціональне призначення, є поліномами Бернштейна-Без'є і визначаються певними полігонами. Закон зміни вершин узагальненого полігону визначається сукупним характеристичним многогранником, що задає всю порцію поверхні. Процес інтерактивного керування формою такої поверхні полягає у цілеспрямованому зміщенні точок реперу з синхронним відтворенням отриманої поверхні.

Природно, що одержати потрібну форму такої поверхні й керувати її зміною у процесі подальшого проєктування досить непросто. Причому, складність цього зростає із зростанням розмірності реперу, до того ж й непропорційно. Тому у інженерній практиці складні поверхні розбивають на комірки (порції). Для завдання кожної з них найчастіше використовують бікубічні рівняння поверхонь у формі Без'є. Завдяки цьому вдається значно спростити загальну задачу конструювання складної поверхні шляхом зменшення порядку поверхні, досягненням одноманітності конструкторських дій та за рахунок більшої однорідності алгоритму формування складеної поверхні. При цьому надається можливість, в разі необхідності, вносити локальні зміни форми поверхні. Проте, виникає необхідність вирішення задачі гладкого стикування між собою суміжних порцій поверхонь у єдину гладку складену поверхню.

Останній рис. 1.2, в показує можливість поєднання двох способів з попередніх рисунків для завдання порції поверхні п'ятого порядку, трансверсальна сітка якої утворюється кривими другого порядку й кубічними кривими Без'є.

Таким чином, наведені приклади ще раз доводять, що керуючий апарат синтезу ГО бажаної форми повинен мати геометричну природу, складатися з простих геометричних елементів і мати просту й зрозумілу користувачеві графічну інтерпретацію на рівні звичних зорових образів, а алгоритм цілеспрямованого пошуку форми ГО повинен визначатись як сукупність елементарних дій над обумовленими складовими елементами керуючого апарату з забезпеченням адекватної керуючому впливові прогнозованості зміни форми створюваного ГО.

#### 1.4. Керований синтез складених поверхонь типу медіатрис

Наочним прикладом практичного застосування простого керуючого апарату інтерактивного пошуку конструювання складених ГО у тривимірному просторі є спосіб генерації так званих медіатрис пар опуклих локально-диференційованих фігур. Розробка теоретичних основ і дослідження властивостей таких ГО належить доц. В.В.Глогівському та аспірантці О.А.Островській [67, 157, 230, 68] з ДУ "Львівська політехніка". Алгоритмічне та відповідне програмне забезпечення комп'ютерного керованого



## ЗМІСТ

	Стор.	
Передмова.....	3	
Перелік умовних позначень і скорочень.....	4	
<b>ВСТУП.....</b>	<b>5</b>	
<b>1. ПРОБЛЕМА КЕРОВАНОЇ ЗМІНИ ФОРМИ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ.....</b>	<b>7</b>	
1.1. Геометрична модель як результат конструювання або моделювання ГО.....	7	
1.2. Можливості керування формою ГО, закладені у структурі геометричної моделі.....	10	
1.3. Можливості існуючих методів конструювання щодо керованої варіації форми ГО.....	12	
1.4. Керований синтез складених поверхонь типу медіатрис.....	15	
1.5. Співіснування конструювання і моделювання ГО. Аналіз природи процесу конструювання.....	20	
1.6. Історична періодизація розвитку методів та засобів конструювання ГО.....	22	
1.7. Критерії ефективності комп'ютерних методів конструювання ГО.....	25	
1.8. Двохфазова технологія синтезу моделей ГО. Шляхи її розвитку і вдосконалення.....	26	
1.9. Дискретно-точкове подання ГО.....	28	
1.10. Два напрямки керованої варіації форми ГО.....	30	
1.11. Простір: поняття, означення, перетворення.....	32	
Висновки.....	34	
<b>2. ДЕФОРМАТИВНЕ КОНСТРУЮВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ.....</b>	<b>36</b>	
2.1. Теоретичні передумови розробки методів ДК ГО.....	36	
2.2. Застосування підходів ДК у фундаментальній математиці.....	41	
2.3. Деформативне конструювання: означення, складові, інструментарій.....	43	
2.4. Практичне застосування підходів деформативного конструювання сучасними методами синтезу ГО.....	45	
2.5. Деформативне конструювання і геометричні перетворення простору. Категорія "простір" у розумінні А. Пуанкаре.....	49	
2.6. Геометричні перетворення – інструментальний апарат керованої зміни форми у ДК ГО.....	53	
2.7. Вимоги до деформативного конструювання ГО.....	68	
2.8. Фізична та математична моделі ДК.....	75	
2.9. Огляд робіт з прикладної геометрії, що тяжіють до ДК та ГП з керованою зміною форми створюваних ГО.....	80	
2.10. Зважено-груповий метод локальної деформації ГО.....	105	
2.11. Реалізація основних принципів ДК ГО в сучасних комп'ютерних ПЗ.....	117	
Висновки.....	132	
<b>3. ГЕОМЕТРИЯ ПОЛІТКАНИН.....</b>	<b>134</b>	
3.1. Політканинні системи координат.....	135	
3.2. Прямолінійні політканини.....	144	
3.3. Теоретичні основи політканинних перетворень.....	150	
3.4. Лінійні перетворення як окремі випадки політканинних перетворень.....	159	
2.4.1. Порівняльний аналіз афінних та політканинних перетворень.....	161	
2.4.2. Інтерпретація проєктивних перетворень як окремого випадку політканинних.....	165	
Висновки.....	167	
<b>4. МАТЕМАТИЧНИЙ АПАРАТ ПОЛІТКАНИННИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ.....</b>	<b>169</b>	
4.1. Політканинне перетворення точок, що належать КБПТ.....	170	
4.2. Реалізація варіантів політканинних відповідностей двох точкових полів.....	173	
4.3. Політканинні перетворення тривимірного простору.....	184	
4.4. Комп'ютерне дослідження властивостей політканинних перетворень.....	190	
4.5. Забезпечення топологічності політканинних перетворень.....	209	
4.6. Реконструкція координатних базисів політканинних перетворень.....	217	
Висновки.....	235	
<b>5. ПОЛІТКАНИННІ ПЕРЕТВОРЕННЯ У ДЕФОРМАТИВНОМУ КОНСТРУЮВАННІ КРИВИХ ЛІНІЙ.....</b>	<b>237</b>	
5.1. Теоретико-експериментальне обґрунтування ДК плоских кривих із застосуванням апарату політканинних перетворень.....	238	
5.2. КБПТ – керуючий апарат ДК плоских кривих. Варіанти його застосування.....	252	
5.3. Сплайни (p-сплайни) на основі політканинних перетворень.....	270	
5.4. Керований синтез просторових кривих на основі політканинних перетворень площини.....	274	
5.5. Локальна деформація просторових кривих на основі політканинних перетворень тривимірного простору.....	284	
5.6. Комп'ютерні технології попереднього проєктування форми криволінійних об'єктів способом адаптивного графічного скетчингу.....	287	
Висновки.....	303	
<b>6. ПОЛІТКАНИННІ ПЕРЕТВОРЕННЯ У ДЕФОРМАТИВНОМУ КОНСТРУЮВАННІ ДВОВИМІРНИХ ОБ'ЄКТІВ.....</b>	<b>306</b>	
6.1. Концептуальні засади комп'ютерного синтезу геометричних моделей кінематичних поверхонь на основі політканинних перетворень.....	308	

6.2. Політканинні перетворення в деформативному конструюванні умовно-топографічних поверхонь.....	313
6.3. Політканинні перетворення як апарат деформативного конструювання каналових поверхонь.....	327
6.4. Комп'ютерний синтез геометричної моделі теоретичної поверхні вилкового копача із застосуванням політканинних перетворень.....	337
6.5. Політканинні перетворення у керованому синтезі робочих поверхонь розпушувальних елементів безвідвальної обробки ґрунту.....	350
6.6. Варіанти конструювання кінематичних поверхонь із застосуванням політканинних перетворень.....	359
6.6.1. Політканинні перетворення у деформативному конструюванні поверхонь складного обертання із твірною змінної форми.....	359
6.6.2. Конструювання фюзеляжних поверхонь.....	360
6.6.3. Конструювання спрягаючих поверхонь.....	362
Висновки.....	365
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	368

Юрій ДОРОШЕНКО

**ПОЛІТКАНИННІ ПЕРЕТВОРЕННЯ  
у  
ДЕФОРМАТИВНОМУ КОНСТРУЮВАННІ  
ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ**

Увесь обсяг робіт з додрукової підготовки монографії  
до видання виконано *Ю.Дорошенком*

Підписано до друку 11.10.2001.

Формат 60x84  $\frac{1}{16}$ .

Папір офсетний.

Гарнітура Arial Cug.

Друк офсетний.

Умовн. друк. арх. 24,4.

Умовн. фарбо-відб. 24,4.

Облік.-вид. арх. 27,4.

Тираж 300 екз.

Видавництво "Педагогічна Думка"  
Інституту педагогіки АПН України.  
04053, Київ-53, вул. Артема 52А.  
Тел. 211-97-01.