УДК 630.145.61

В.С. Горбатов, канд. техн. наук
В.М. Першаков, канд. техн. наук
Г.В. Таран
М.В. Шевчук
А.С. Корнієнко

ДИНАМІЧНА ПОВЕДІНКА ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНИХ СТРИЖНЕВИХ ЕЛЕМЕНТІВ ВЕЛИКОПРОГОНОВИХ ПОКРИТТІВ АНГАРІВ

Інститут екології та дизайну НАУ, e-mail: veryzhsky@mbox.com.ua

Наведено результати аналітичних досліджень стаціонарних поперечних коливань прямолінійного попередньо напруженого сталевого стрижня за допомогою затяжки під час дії збудження гармонічного вигляду.

Мета роботи

Складання методики прогнозування режимів стаціонарних поперечних коливань прямолінійного сталевого попередньо напруженого стрижня за допомогою центрово встановленої затяжки.

Періодичні збудження виникають під час транспортування або монтажу конструкції.

Аналіз попередніх досліджень

Ефективні попередньо напружені сталеві стрижневі елементи широко використовують у будівельній практиці.

Питання проектування таких елементів достатньо повно розглянуто у працях [1–4].

Проте в ряді випадків доцільно прогнозувати рух таких стрижнів під час дії періодичних збуджень для повноти інформації про поведінку стрижнів.

Постановка завдання

Розглянуто поперечні коливання стрижня довжиною ℓ, попередньо напруженого затяжкою, розміщеною по осі симетрії перерізу та жорстко закріпленою на кінцях стрижня, а також у $(n-1)$ проміжних точках з абсцисами $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$.

Стрижень має постійний по довжині переріз ($A = \text{const}$, $EI = \text{const}$) та достатню жорсткість на стиск $(E_3A_3 / EA << 1)$. Розрахункову схему системи "стрижень – затяжка" показано на рис. 1.

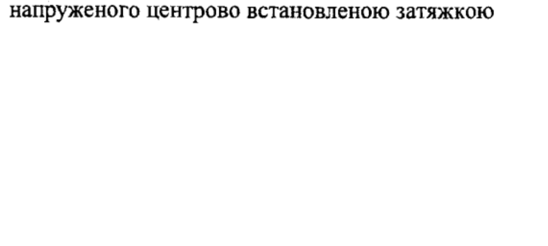


Рис. 1. Розрахункова схема стрижня попередньо напруженого центрово встановленою затяжкою

Основний матеріал досліджень

Диференціальне рівняння вимушених коливань системи "стрижень–затяжка" в інтервалі (a_{i-1}, a_i), отримане у працях [2–4], має вигляд

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) + P\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = f_0(x,t),$$

де EI – згинальна жорсткість стрижня Па · см^4; E – модуль пружної сталі, Па; I – момент інерції перерізу стрижня, см^4; P – зусилля в стрижні, Н; m – погонна маса стрижня, кг·см$^{-1}$; $f(x,t)$ – інтенсивність збуджувальної сили, Н·с$^{-2}$; t – час, с.

Зусилля у затяжці визначають за формулою

$$N_i = \frac{E_3A_3}{\ell_i + A_3\int\limits_{a_{i-1}}^{a_i}\frac{dx}{A}}\left[d_i - c\int\limits_{a_{i-1}}^{a_i}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx - \frac{1}{2}\int\limits_{a_{i-1}}^{a_i}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx\right]_{(i=1,2,\ldots n)},$$

де E_3A_3 – жорсткість затяжки на стик, Н; ℓ_i – довжина i-ї ділянки затяжки у ненапруженому стані, см; $(a_i - a_{i-1})$ – довжина i-ї ділянки стрижня у ненапруженому стані, см; d_i – різниця між довжинами i-ї ділянки стрижня та затяжки до її закріплення, см.

Для розглянутого випадку центрово закріпленої затяжки тільки по кінцях стрижня $(n=1, c=0)$ початкове рівняння руху стрижня набуває вигляду

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + P\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = f_0(x,t); \qquad (1)$$

$$P = P_3 - \frac{1}{2\ell}E_3A_3\int\limits_0^{\ell}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx,$$

де P_3 – натягнення в затяжці, Н.

Початкове натягнення затяжки визначають за формулою

$$N_3 = E_3A_3\frac{d}{\ell}.$$

Розв'язок рівняння (1) має вигляд

$$y(x,t) = \varphi(t)\sin\left(k\pi\frac{x}{\ell}\right),$$

де $\varphi(t)$ – переміщення стрижня, см.

Вираз для виявлення зусилля в затяжці набуває вигляду

$$N = N_3 - \frac{1}{4}E_3A_3\left(k\frac{\pi}{\ell}\right)^2\varphi^2.$$

У разі інтенсивності збуджувальної сили, що змінюється за законом

$$f_0(x,t) = f_0\cos(\omega t + \varphi)\sin\left(k\pi\frac{x}{\ell}\right),$$

отримаємо рівняння поперечних коливань системи "стрижень – затяжка" у вигляді рівняння Дуффінга:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \alpha\varphi(t) + \beta\varphi^3(t) = f\cos\omega t\ ;$$

$$\alpha = \frac{1}{m}\left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2(N_E - N_3),$$

де ω – частота збуджуючої сили, c^{-1}; N_E – значення k-ї ейлерової критичної сили, Н:

$$N_E = \left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2 EI\ ;$$

$$\beta = \frac{1}{4m}\left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^4 E_3A_3\ ;$$

$$f = \frac{1}{m}f_0.$$

Диференціальне рівняння поперечних коливань системи "стрижень – затяжка" за додаткової постійно діючої розтяжної продольної сили N_0, що прикладена до стрижня центрово, набуде вигляду:

$$\alpha = \frac{1}{m}\left(\frac{\pi}{\ell}k\right)^2\left[N_E - (N_3 - N_0)\right].$$

Усі отримані надалі результати можна використати до задачі у разі заміни N_3 на вираз

$$N_3^* = N_3 - N_0.$$

Значення власних частот поперечних коливань системи "стрижень – затяжка" виявляють залежно від ступеня натягування затяжки за допомогою таких формул:

– якщо $N_3 \le N_E$,

то

$$\theta(a) = \sqrt{\alpha + 0{,}756\,\beta\,a^2}\ ;$$

– якщо

$$N_3 > N_E\ ,\ a < \pm\sqrt{2\frac{|\alpha|}{\beta}},$$

то

$$\theta(a) = \sqrt{2|\alpha|}\ \sqrt[9]{2 - \frac{\beta}{|\alpha|}a^2};$$

– якщо

$$N_3 > N_E\ ,\ a \ge \pm\sqrt{2\frac{|\alpha|}{\beta}},$$

то власні частоти великих коливань θ_B

$$\theta_B(a) = 0{,}77\sqrt{2|\alpha|}\ \sqrt[3]{\frac{\beta}{|\alpha|}a^2 - 2}\ .$$

На рис. 2, *б* за допомогою наведених формул побудовані криві власних частот коливань системи (штрихпунктирні криві). Результати розрахунків подано у безрозмірних координатах:

$$\bar{f} = \frac{f}{\alpha}\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\ ;$$

$$\omega = \frac{\omega}{\sqrt{\alpha}}\ ;$$

$$\bar{a} = \alpha\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\ .$$

Якщо початкове зусилля у затяжці менше ніж критична сила для стрижня ($N_3 < N_E$ та $\alpha \ge 0$), то відбуваються поперечні коливання відносно початкового єдиного стійкого положення рівноваги, що збігається з прямолінійним положенням стрижня.

Перше критичне значення натягнення, у разі перевищення якого прямолінійна форма стрижня стає нестійкою, характеризується параметром

$$d_{cr} = \frac{\pi^2}{\ell}\frac{EI}{E_3A_3}.$$

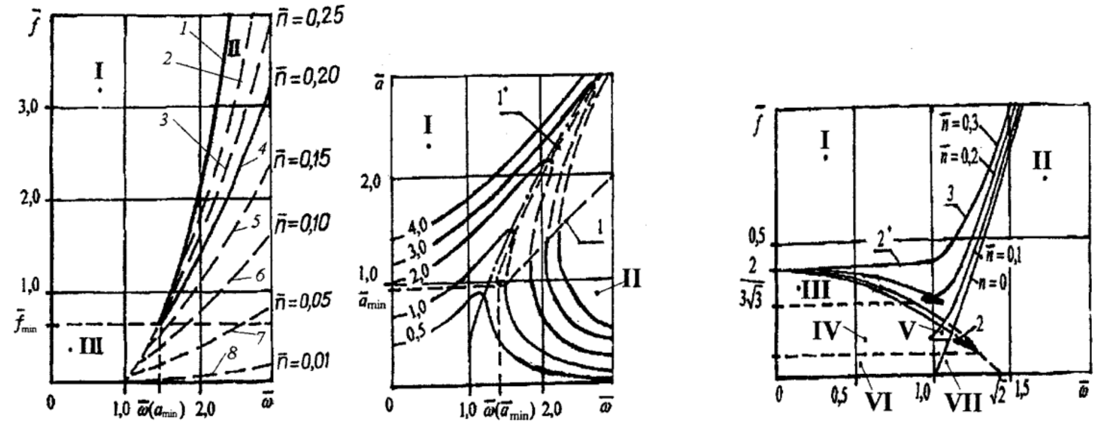
Якщо стрижень отримує натягнення силою $N_3 > N_E$ (що відповідає $\alpha < 0$), то система буде мати три сміжні форми рівноваги.

Одна з форм рівноваги – прямолінійна буде нестійкою, дві інші – криволінійні і симетричні відносно прямолінійної форми – стійкими.

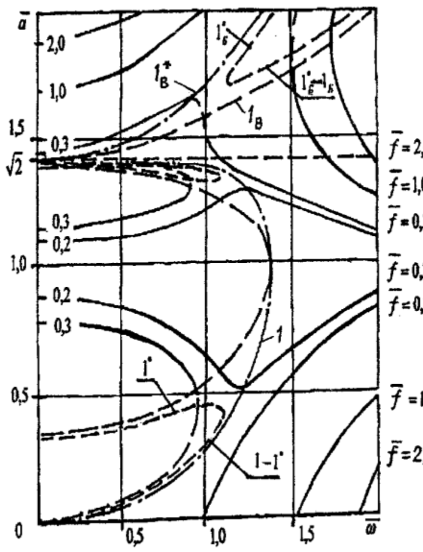
Коливання системи будуть реалізовуватися як з "малими" амплітудами відносно одного зі стійких положень рівноваги, що мають ординати

$$Y_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \pm\frac{2\ell}{k\pi}\sqrt{\frac{P_3 - P_E}{E_3A_3}},$$

так і з охопленням усіх трьох положень рівноваги з "великими" амплітудами (має місце стрибок).



а б в



г

Рис. 2. Режими коливань (*а*, *в*) та амплітудно-частотні характеристики при $\bar{n} = 0{,}2$ (*б*, *г*) системи "стрижень – затяжка" при $N_3 \le N_E$ та $N_3 > N_E$:
а: I – зона синфазних коливань за будь-яких початкових умов; II – зона синфазних або протифазних коливань залежно від початкових умов; III – зона відсутності стрибків при $\bar{n} = 0{,}2$;
б: I – синфазні коливання; II – протифазні коливання;
в: I – зона великих синфазних коливань за будь-яких початкових умов; II – зона великих синфазних або малих протифазних коливань залежно від початкових умов; III – зона великих або малих синфазних коливань; IV, VI – зони малих синфазних або протифазних коливань; V, VII – зони п'яти режимів руху

Параметри вільних та вимушених коливань системи "стрижень – затяжка" у першому випадку визначаємо як для системи з жорсткою пружною характеристикою, у другому випадку – як для системи зі стрибком. Стаціонарним коливанням системи "стрижень – затяжка" відповідають амплітудно-частотні рівняння:

– якщо $N_3 \le N_E$, то

$$a\sqrt{\alpha - \frac{1}{2}\beta a^2} = \frac{\theta(a) f}{\theta^2(a) - \omega^2};$$

– якщо

$$N_3 > N_E\,,\;\; a < \sqrt{2\frac{|\alpha|}{\beta}},$$

то

$$\sqrt{\frac{\beta}{2}}\left(a^2 - \frac{|\alpha|}{\beta}\right) = \frac{\theta(a) f}{\theta^2(a) - \omega^2};$$

– якщо $N_3 > N_E$, $a \ge \sqrt{2\frac{|\alpha|}{\beta}}$, то

$$a\sqrt{\frac{\beta}{2}\left(a^2 - 2\frac{|\alpha|}{\beta}\right)} = \frac{\theta_B(a) f}{\theta_B^2(a) - \omega^2}.$$

На рис. 2 амплітудно-частотні характеристики системи побудовано в безрозмірних координатах.

Якщо $N_3 \le N_E$, то на графіках амплітудно-частотних характеристик (рис. 2, *б*) зона нестійких рухів обмежена з одного боку межею 1^* власних частот, а з другого – межею *1*, що побудована за формулою

$$\omega^2(a) = \theta^2(a) - \frac{\theta a}{f(a)} f_0 =$$

$$= \alpha + \frac{3}{4}\beta a^2 + \frac{3}{2}\beta a^2 \sqrt{\frac{\alpha + 0{,}75\beta a^2}{\alpha + 0{,}50\beta a^2}} \approx \alpha + \frac{9}{4}\beta a^2.$$

На графіку параметрів реалізації режимів рухів (рис. 2, *а*), межа 2^*, що відповідає параметрам збудження, при яких відбуваються стрибкоподібні переходи від протифазних коливань до синфазних, являє собою межу, побудовану за допомогою приблизної формули

$$\omega^2 \approx \alpha \pm \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{3}{2}\beta f^2}.$$

Параметри збудження, що знаходяться в зоні, розміщеній нижче від межі *2*, реалізують залежно від початкових умов або синфазні, або протифазні стаціонарні коливання.

Параметри збудження, розміщені вище від межі *2*, характеризуються тільки синфазними стаціонарними коливаннями, що реалізуються за будь-яких початкових умов.

Якщо

$$N_3 > N_E\ ,\ a < \sqrt{2\frac{\alpha}{\beta}}$$

на графіку амплітудно-частотних характеристик (рис. 2, *г*), зона нестійких рухів обмежена з одного боку межею *1* власних частот, а з другого – межею 1^*, побудованою за формулою

$$\omega(a) = \theta(a) - \frac{1}{9}\left(\frac{\beta}{\alpha}a^2 - 1\right)\left(\sqrt{2\alpha}\right)^9 \theta^8(a).$$

На графіку параметрів реалізації режимів рухів (рис. 2, *в*), межа 2^*, що відповідає параметрам збудження, за яких відбувається стрибкоподібні переходи від малих до великих синфазних коливань, будують за формулою

$$f \approx \frac{1}{3}\sqrt{\frac{\alpha}{3}}(2\alpha - \omega^2).$$

Умови існування малих коливань за заданого рівня збуджувального навантаження f наявні у речовинних коренях трансцендентного рівняння

$$\Phi = \sqrt{\frac{\beta}{2}}\left(a^2 - \frac{|\alpha|}{\beta}\right)\theta(a) \pm f.$$

Якщо

$$N_3 > N_E,\ a \geq \sqrt{2\frac{\alpha}{\beta}}\ ,$$

то на графіку амплітудно-частотних характеристик (рис. 2, *г*) зона нестійких рухів обмежена з одного боку межею $I_Б^*$ власних частот, а з другого – межею $I_В$, побудованою за формулою

$$\omega(a) = \frac{\theta(a) + 0{,}86\sqrt{\alpha}\beta a^2\left(\frac{1}{2}\beta a^2 - \alpha\right)}{\beta a^2 - \alpha}. \qquad (2)$$

За сумісного розв'язання рівняння амплітудно-частотної характеристики та рівняння (2) отримаємо межу *2*, що відповідає переходу великих коливань від протифазного до синфазного режиму (рис. 2, *в*).

На графіку реалізації режимів рухів (рис. 2, *в*) межу *3*, що відповідає переходу від малих коливань до великих, будують за формулою

$$f = \sqrt{\frac{\alpha}{3\beta}}(\alpha - \omega^2).$$

Для реальних конструкцій потрібно врахувати також дію сил тертя.

Диференціальне рівняння поперечних коливань системи "стрижень – затяжка" з урахуванням дії сил в'язкого тертя набуває вигляду

$$\ddot{\varphi}(t) + 2n\dot{\varphi}(t) + \alpha\varphi(t) + \beta\varphi^3(t) = f\cos(\omega t + \eta), \qquad (3)$$

де n – коефіцієнт в'язкого тертя.

Нелінійне рівняння (3) розв'язуємо за допомогою методу змінного масштабу [5], який дозволяє виконати аналіз суттєво нелінійних систем.

Аналіз рівняння (3) свідчить про те, що режим коливань системи знаходиться залежно від ступеня натягнення затяжки.

Стаціонарним коливанням системи "стрижень – затяжка" відповідають амплітудно-частотні рівняння:

– якщо

$$N_3 \leq N_E,$$

то

$$a\sqrt{\alpha - \frac{\beta}{2}a^2} = \frac{\pm\theta(a)f}{\sqrt{[\theta^2(a) + n^2 - \omega^2]^2 + 4n^2\omega^2}}; \qquad (4)$$

– якщо

$$N_3 > N_E\ ,\ a \leq \sqrt{2\frac{\alpha}{\beta}}\ ,$$

то

$$\sqrt{\frac{\beta}{2}}\left(a^2 - \frac{\alpha}{\beta}\right) = \frac{\pm\theta(a)f}{\sqrt{[\theta^2(a) + n^2 - \omega^2]^2 + 4n^2\omega^2}};$$

– якщо

$$N_3 > N_E,\ a > \sqrt{2\frac{\alpha}{\beta}}\ ,$$

то

$$a\sqrt{\frac{\beta}{2}\left(a^2 - 2\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\pm\theta_B(a)f}{\sqrt{\left[\theta_B^2(a) + n^2 - \omega^2\right]^2 + 4n^2\omega^2}}.$$

На рис. 2, *б*, *г* показано амплітудно-частотні характеристики системи в безрозмірних координатах.

Якщо $N_3 \leq N_E$, то на графіках амплітудно-частотних характеристик (рис. 2, *б*) зона нестійких рухів обмежена кривими 1–1^*, які отримано розв'язанням біквадратного рівняння

$$\left[\omega_{01}^2(a)+n^2-\omega^2\right]\left[\theta^2(a)+n^2-\omega^2\right]4n^2\omega^2=0,$$

де

$$\omega_{01}^2(a)\approx\alpha+\frac{9}{4}\beta a^2.$$

Розв’язання рівняння починають із завдання значенням амплітуди коливання a і визначають параметри $w_{01}(a)$ і $\theta(a)$. Потім розв’язують рівняння (3), беручи до уваги тільки додатні та речовинні корені.

За графіками параметрів реалізації режимів рухів (рис. 2, *а*) межу *2–2** отримують сумісним розв’язанням рівнянь (4), (5).

Межа *2** відповідає параметрам збудження системи, за яких виникає стрибкоподібний перехід від протифазних коливань до синфазних.

Для систем з в’язким тертям доповненням є зона III реалізації синфазних і протифазних коливань без стрибкоподібних переходів один до інших.

Координати екстремальної точки зони нестійких рухів визначають за допомогою формул

$$a_{\min}=\frac{34\sqrt{\alpha}}{9\ \beta}n;$$

$$\omega^2(a_{\min})=\alpha+\frac{17}{3}\sqrt{\alpha}\,n;$$

$$f^2{}_{\min}\approx45\frac{\alpha\sqrt{\alpha}}{\beta}n^3.$$

На графіку є зона реалізації протифазних коливань за будь-яких початкових умов.

Якщо $N_3>N_3$, то на графіку реалізації режимів рухів (рис. 2, *в*) межу *2**, яка відповідає параметрам реалізуючих переходи від протифазних малих коливань до синфазних, будують за формулою

$$f=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{\alpha}{3\beta}\left[(2\alpha+n^2-\omega^2)^2+4n^2\omega^2\right]}.$$

Межа *3*, що відповідає параметрам, реалізуючим змінення положення стійкої рівноваги та перехід від малих коливань до великих, будують за формулою

$$f=\sqrt{\frac{\alpha}{3\beta}\left[(\alpha+n^2-\omega^2)^2+4n^2\omega^2\right]}.$$

На графіку реалізації режимів рухів показано зону VI параметрів збудження, реалізуючих тільки стійкі синфазні та протифазні малі коливання біля одного з двох ненульових положень рівноваги за будь-яких початкових умов.

Екстремальні точки кривих мають такі координати:

– для межі *3*

$$\omega_1=\sqrt{\alpha-n^2};$$

$$f_1=2\frac{\alpha}{\sqrt{3\beta}}n;$$

– для межі *2**

$$\omega_2=\sqrt{2\alpha-n^2};$$

$$f_2=\frac{2}{3}\alpha\sqrt{\frac{2}{3\beta}}n.$$

Межу *2* приблизно змінюють прямою лінією, з’єднуючою отримані координати екстремальних точок меж *3* та *2**.

Межа *2** – це геометричне місце точок з координатами параметрів збудження, що реалізують стрибкоподібні переходи від протифазних до синфазних малих коливань.

Межі *1–1** та $1_Б$–$1^*_Б$ (рис. 2, *г*) будують за допомогою виразу (5).

Як приклад розглянуто коливання попередньо напруженого елемента нижнього пояса кроков’яної ферми, що знаходиться під дією періодичного збудження, яке можливе на стадії транспортування, або монтажу елемента.

Розрахункова довжина елемента $\ell_{ef}=6{,}0$ м.

Переріз елемента має гнуто зварний квадратний профіль – 140×140×5,6 мм.

Елемент виконано зі сталі ВСт3$_{сп}$5-1.

Затяжку виконано з чотирьох канатів К-7 діаметром 15 мм.

Коефіцієнт в’язкого тертя $n=0{,}4\ с^{-1}$.

Графік амплітудно-частотних характеристик стрижневого елемента з різними натягненнями у затяжці зображено на рис. 3.

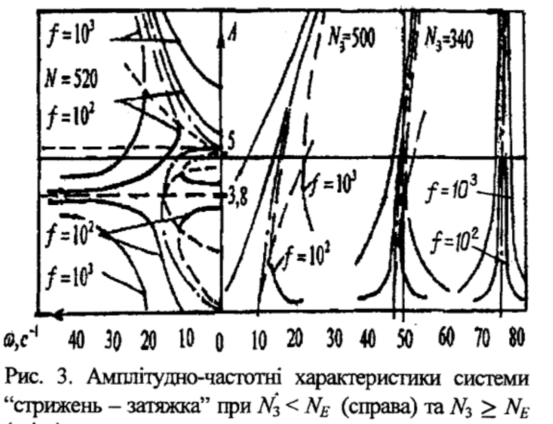


Рис. 3. Амплітудно-частотні характеристики системи “стрижень – затяжка” при $N_3<N_E$ (справа) та $N_3\geq N_E$ (зліва)

Висновки

1. Складено математичну модель руху попередньо напруженого стрижня у вигляді диференціального рівняння Дуффінга.

2. Виконаний аналіз розв'язань рівняння руху свідчить про те, що режими коливань стрижня знаходять залежно від ступеня натягнення затяжки.

3. У разі натягнення стрижня затяжкою до величин $N_3 < N_E$ система "стрижень – затяжка" поводить себе як нелінійно пружна система з жорсткою пружною характеристикою.

4. При натягненні стрижня затяжкою більш ніж $N \geq N_E$ система "стрижень – затяжка" веде себе як нелінійно пружна система зі стрибком і має два положення рівноваги.

5. Наведено розрахунковий приклад аналізу руху конкретного стрижня із затяжкою.

Напрям подальших досліджень

Усунення резонансних режимів коливань і суттєвої вібрації стрижневих елементів попе-редньо напружених затяжкою потребують уточнення прогнозу значень частот і амплітуд коливань нелінійно пружних систем. Такий прогноз дозволяє також підібрати параметри стрижнів, щоб уникнути резонансних режимів вібрації або зменшити амплітуди коливань до допустимих значень.

Отримані результати дозволяють розглянути складніші системи – стрижні з позацентрово встановленою затяжкою, що знаходяться під дією довільних або полігармонічних збуджень.

Список літератури

1. *Металлические* конструкции: Справ. проектировщика. Т.1. Общая часть / Под общ. ред. В.В. Кузнецова. – М.: АСВ, 1998. – 576 с.

2. *Бабий В.П., Нудельман Я.Л.* К вопросу о поперечных колебаниях предварительно напряженных металлических балок // Динамика и прочность машин. – Харьков, 1965. – Вып. 2. – С. 3–14.

3. *Казакевич М.И., Шаломов Б.Я.* Нелинейные колебания предварительно напряженных металлических балок // Третья междунар. конф. по преднапряженным металлоконструкциям, 20–25 окт. 1970 г. – М.: 1971. – С. 143–148.

4. *Коляков М.И., Хачалов Г.Б.* К теории поперечных колебаний преднапряженных составных стержней / Изв. вузов. Сер. стр.-во и архитектура. – Новосибирск, 1980. – №1. – С. 38–42.

5. *Бондарь Н.Г.* Устойчивость и колебания упругих систем в современной технике. – К.: Вища шк., 1987. – 200 с.

Стаття надійшла до редакції 20.10.04.