

Колчунов В.И., д.т.н., проф.; Вакулин Р.Н., аспирант  
Национальный авиационный университет

## СОПРОТИВЛЕНИЕ ОКОЛОАРМАТУРНОЙ ЗОНЫ ПРИ ВЫДЕРГИВАНИИ ЗАКЛАДНОЙ ДЕТАЛИ ИЗ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ КОНСТРУКЦИИ

Большинство сборных железобетонных конструкций имеют закладные детали, с помощью которых конструкция крепится в каркасе здания, поэтому разработка модели сопротивления закладных деталей железобетонных конструкций является весьма важной и актуальной задачей. Как правило, известные методики расчета в значительной мере не учитывают податливость закладных деталей в бетонной матрице и эффекты, которые связаны с несплошностью железобетона (после появления трещин) и несовместимостью деформаций бетона и арматуры.

При действии отрывных усилий  $N$  совместность работы бетона и арматуры в железобетонном элементе обеспечивается околоарматурной зоной (рис. 1).

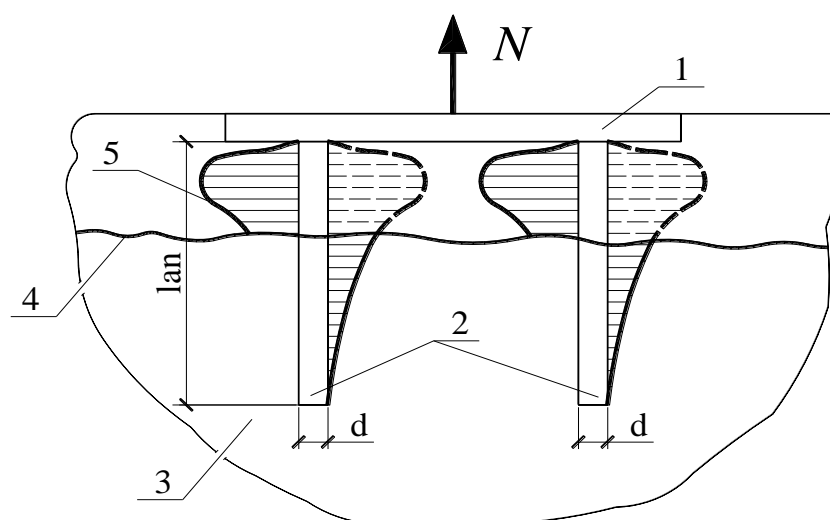


Рис. 1. К расчету закладных деталей на выдергивание: 1 – металлическая пластина закладной детали; 2 – арматурные стержни закладной детали; 3 – бетонная матрица; 4 – трещина в бетонной матрице; 5 – эпюра касательных напряжений

Это местная зона бетона, непосредственно прилегающая к боковой поверхности арматурного стержня и заканчивающаяся (согласно принципу Сен-Венана) на некотором радиальном расстоянии  $t_b$  (рис. 2). Поэтому решение задачи будем вести в цилиндрических координатах с учетом физической нелинейности и специфики бетона, заключающейся в его разном сопротивлении растяжению и сжатию. При этом диаграммы связи “ $\sigma_{bi} - \varepsilon_{bi}$ ”, “ $\mu(\lambda) - \varepsilon_{bi}$ ”, принимаемые в расчете, приведены на рис. 3.

Криволинейный участок диаграммы “ $\sigma_i - \varepsilon_i$ ” (рис. 3а) описывается [1] квадратной параболой:

$$\sigma_i = \frac{R_b - E_b \varepsilon_{br,t}}{\varepsilon_{br,t}^2} \varepsilon_i^2 + E_b \varepsilon_i, \quad (1)$$

а прямолинейный – в виде линейной функции:

$$\sigma_i = R_b - \frac{R_b(1-\beta)}{\varepsilon_{bu} - \varepsilon_{br,t}} (\varepsilon_i - \varepsilon_{br,t}). \quad (2)$$

Проецирование диаграммы  $\sigma_i - \varepsilon_i$  на оси  $\tau_{rz} - \gamma_r$  позволяет установить связь между касательными напряжениями и относительными сдвигами или, при введении местного сдвига, между относительными взаимными смещениями арматуры и бетона –  $\varepsilon_q$ .

Аналогично осуществляется проецирование для нормальных напряжений соответственно на оси  $x$  и  $y$ .

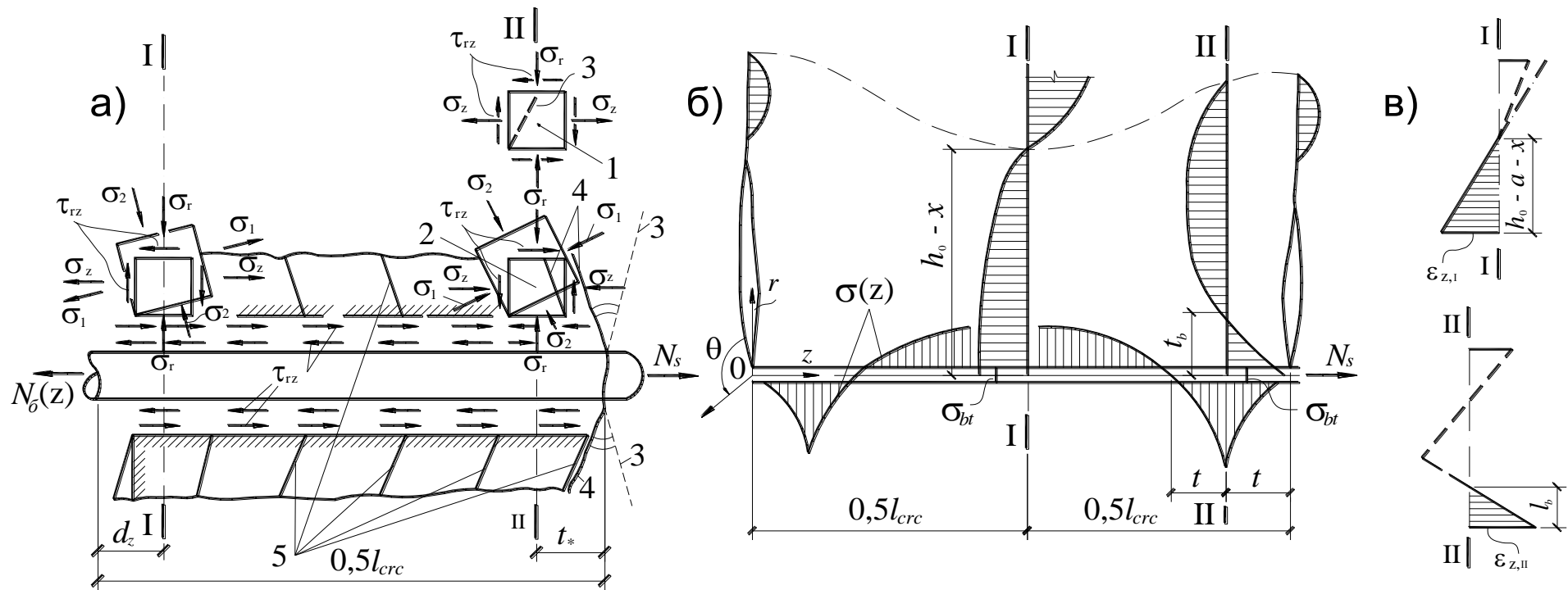


Рис. 2. К решению задачи сопротивления околоарматурной зоны в железобетонном элементе: а – особенности напряженного состояния до появления трещин (1) и после появления поперечных трещин (2), соответственно; б, в – распределение напряжений в бетоне околоарматурной зоны и относительные продольные деформации бетона в прилегающих поперечных сечениях I-I и II-II околоарматурной зоны, соответственно



Тогда максимальные нормальные напряжения в растянутом бетоне выразятся как  $k_2 R_{bt}$ , где коэффициент  $k_2$  определяется формулами механики твердого деформируемого тела при проецировании точки D из диаграммы “ $\sigma_i - \varepsilon_i$ ” на оси “ $\sigma_{\pi} - \varepsilon_{\pi}$ ”.

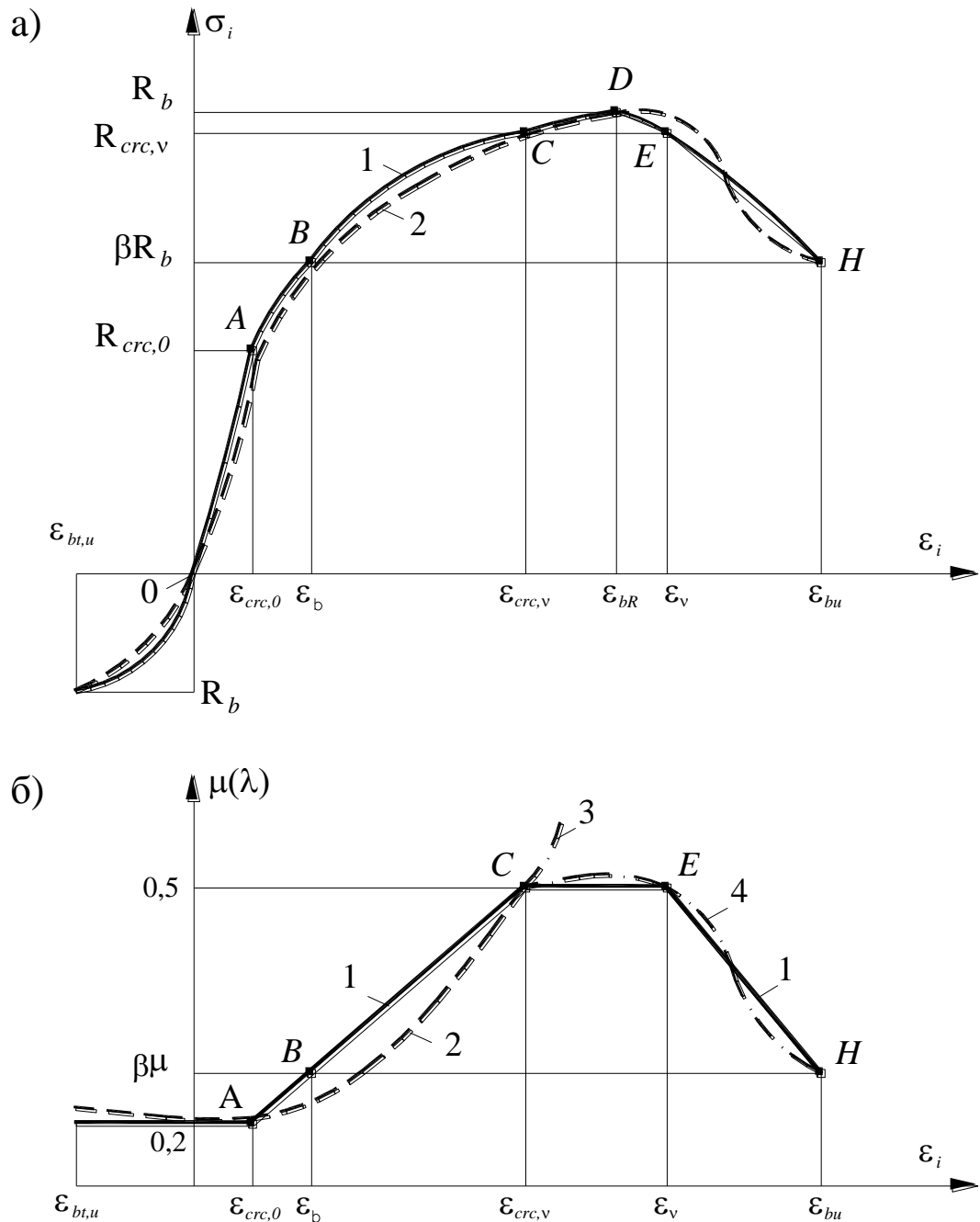


Рис. 3. Диаграммы связи “напряжения-деформации” (а) и “коэффициент поперечных деформаций” (б) для бетона: 1 – расчетные; 2 – построенные по опытным данным; 3 – то же, с учетом магистральных трещин между столбами; 4 – то же, с замером деформаций лишь в пределах столбов

При этом, деформация удлинения, соответствующая точке D, выразится как  $\varepsilon_{br,t} = \frac{k_2 2R_{bt}}{E_b}$ .

Аналогичное проецирование для точки H, соответствующей напряжению  $\beta R_b$  (рис. 3а), приведет в направлении оси z к напряжению  $\sigma_{bt}$ . Деформации  $\varepsilon_{bu}$  (рис. 3а) будет соответствовать для растянутого бетона в направлении оси z деформация  $\varepsilon_{bu,t}$ . Текущую координату  $\varepsilon_i$  в формуле (2) следует заменить применительно к направлению z на  $\varepsilon_{z,I}(r)$ . Теперь формула (2) преобразована к направлению оси z, а так как она описывает ниспадающий участок диаграммы “напряжения-деформации” бетона, то рассматриваемое ниже решение задачи сопротивления околоарматурной зоны железобетонного элемента будет соответствовать предельному.

Для решения задачи примем предпосылку, касающуюся околоарматурных зон, прилегающим к сечениям I-I и II-II (рис. 2), в которых необходимо определить напряженно-деформированное состояние бетона – эпюра деформаций растянутого бетона в поперечном сечении I-I и сжатого бетона околоарматурной зоны в сечении II-II принимаются линейными в соответствии с (рис. 2в). Эта предпосылка согласуется с представлениями о сопротивлении поперечных сечений стержневых элементов и подтверждается многочисленными экспериментами [1 и др.]

Значения  $\varepsilon_b(z)$  в сечениях I-I (а) и II-II (б) определяются с учетом несовместности деформаций бетона и арматуры. Обозначим их соответственно через  $\varepsilon_{z,I}$  и  $\varepsilon_{z,II}$ . Тогда, в соответствии с принятой предпосылкой (рис. 2в), будем иметь:

$$\varepsilon_{z,I}(r) = \varepsilon_{z,I} \left( 1 - \frac{r-a}{h_0 - a - x} \right); \quad (3)$$

$$\varepsilon_{z,II}(r) = \varepsilon_{z,II} \left( 1 - \frac{r-a}{t_b} \right), \quad (4)$$

где a – радиус арматурного стержня.

С учетом диаграммы (рис. 3а) для линейного сечения I-I находим:

$$\sigma_{z,l}(r) = k_2 R_{bt} - \frac{k_2 R_{bt} - \sigma_{bt}}{\varepsilon_{bu,t} - \frac{k_2 2R_{bt}}{E_b}} \left( \varepsilon_{z,l}(r) - \frac{k_2 2R_{bt}}{E_b} \right). \quad (5)$$

Применительно к уравнению (5) можно ввести следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} K_{D1} &= k_2 R_{bt}, \\ K_{D2} &= \varepsilon_{bu,t} - \frac{k_2 2R_{bt}}{E_b}, \\ K_{D3} &= \frac{k_2 2R_{bt}}{E_b}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

в итоге оно примет вид:

$$\sigma_{z,l}(r) = K_{D1} - \frac{K_{D1} - \sigma_{bt}}{K_{D2}} (\varepsilon_{z,l}(r) - K_{D3}). \quad (7)$$

Учитывая, что рассматриваются деформации и напряжения вдоль оси  $z$ , диаграмма “ $\sigma_i - \varepsilon_i$ ” (рис. 3а) проектируется на эту ось. Поскольку известно, что криволинейные участки диаграммы описываются квадратной параболой и имеются координаты конечных точек этих парабол ( $\varepsilon_{z,I}$  и  $\sigma_{bt}$ ,  $\varepsilon_{z,II}$  и  $\sigma_b$ ), то угол между осями  $i$  и  $z$  необходим лишь для уточнения начального модуля диаграммы “ $\sigma_{b,z} - \varepsilon_{b,z}$ ”:

$$E_{b,z} = \varphi \cdot E_b. \quad (8)$$

где  $\varphi$  – коэффициент, учитывающий сложное напряженное состояние и наличие касательных напряжений вдоль оси  $z$  [1]. При этом величина касательных напряжений сцепления и нормальных напряжений  $\sigma_{b,z}$  определяется при нагрузке, составляющей 0,2 от  $M_{cre}$ .

После подстановки выражения (3) в уравнение (7), будем иметь:

$$\sigma_{z,l}(r) = K_{D1} - \frac{K_{D1} - \sigma_{bt}}{K_{D2}} \left( \varepsilon_{z,l} \left( 1 - \frac{r-a}{h_0 - a - x} \right) - K_{D3} \right); \quad (9)$$

Дополнительно принято допущение о том, что в зоне, прилегающей к сечению (I-I) изменение напряжений в бетоне  $\sigma(z)$  примерно одинаково как по направлению координаты  $r$ , так и по направлению координаты  $z$  (см. рис. 4), то

есть  $\sigma(z)$  в непосредственной близости от сечения (I-I) можно найти по формуле аналогичной (9).

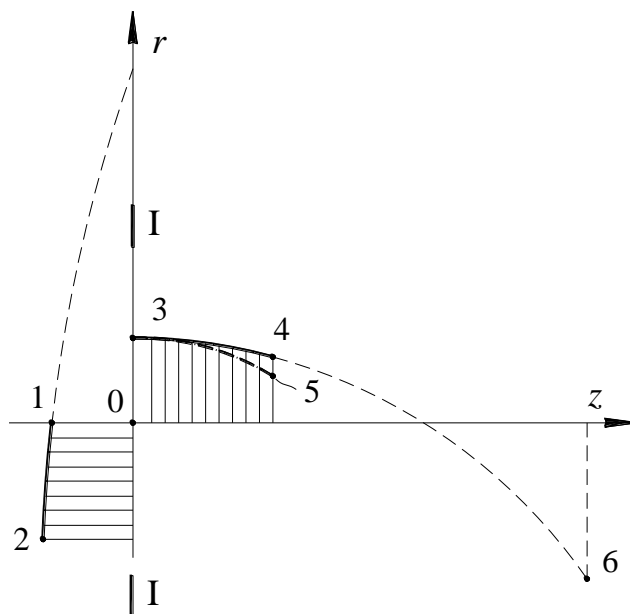


Рис.4. Иллюстрация к дополнительному допущению о том, что в зоне, прилегающей к сечению (I-I) изменение напряжений в бетоне  $\sigma(z)$  примерно одинаково как по направлению координаты  $r$ , так и по направлению координаты  $z$

Дело в том, что уточнение функции  $\sigma(z)$  в окрестности сечения (I-I) особого значения не имеет – здесь гипербола, парабола, или прямая примерно одинаково аппроксимируют указанную зависимость. Здесь уместно подчеркнуть, что при дифференцировании по  $z$  параметры  $k_2$  и  $\varepsilon_z$  рассматриваются как переменные, которое после дифференцирования “замораживается” при  $z = z_1$ .

Рассмотрим теперь основные уравнения для околоарматурной зоны применительно к случаю, когда имеются лишь поперечные трещины, а продольных и радиальных трещин еще нет.

Учитывая, что рассматриваемая задача осесимметрична, то  $\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta}$ ,  $\tau_{\theta r}$  и  $\tau_{\theta z}$  равно нулю и уравнение равновесия в цилиндрических координатах примут вид:

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{zr}}{r} = 0; \quad (10)$$



$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0. \quad (11)$$

Упрощается и геометрические соотношения Коши, так как составляющие перемещения  $v$  и деформаций  $\gamma_{r\theta}$ ,  $\gamma_{\theta z}$  в силу симметрии равны нулю. Остальные компоненты деформаций примут вид:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \gamma = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}. \quad (12)$$

Физические уравнения для бетонной матрицы, моделируемой между поперечными трещинами упругопластичным изотропным телом, запишем в виде:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E(\lambda)} [\sigma_r - \varphi(\lambda)(\sigma_z + \sigma_\theta)]; \quad (13)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E(\lambda)} [\sigma_\theta - \varphi(\lambda)(\sigma_z + \sigma_\theta)]; \quad (14)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E(\lambda)} [\sigma_z - \varphi(\lambda)(\sigma_z + \sigma_\theta)]; \quad (15)$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\tau_{rz}}{\varphi(\lambda)}, \quad (16)$$

где  $E(\lambda)$ ,  $\xi(\lambda)$  и  $\mu(\lambda)$  - соответственно упругопластические модули деформаций и коэффициент поперечных деформаций для бетона.

Тогда, применительно к околоарматурной зоне между поперечными трещинами, уравнение (10), с учетом выражения (9), примет вид:

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \left(1 - \frac{r-a}{h_0-a-x}\right) \left(\frac{\sigma_{bt}}{K_{D2}} - \frac{K_{D1}}{K_{D2}}\right) \frac{\partial \varepsilon_{z,l}}{\partial z} \Big|_{z=z_1} + \frac{\varepsilon_{z,l}}{K_{D1}} \frac{\partial \sigma_{bt}}{\partial z} \Big|_{z=z_1} - \frac{K_{D3}}{K_{D2}} \frac{\partial \sigma_{bt}}{\partial z} \Big|_{z=z_1} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0. \quad (17)$$

Следует подчеркнуть, что для выражения включенного во вторые круглые скобки, сначала выполняется дифференцирование по  $z$ , а уже потом оно вычисляется при  $z = z_1$ .

С учетом отмеченного, можно ввести следующее обозначение:

$$\left(\frac{\sigma_{bt}}{K_{D2}} - \frac{K_{D1}}{K_{D2}}\right) \frac{\partial \varepsilon_{z,l}}{\partial z} \Big|_{z=z_1} = A_{1,l} \quad \frac{\varepsilon_{z,l}}{K_{D1}} \frac{\partial \sigma_{bt}}{\partial z} \Big|_{z=z_1} - \frac{K_{D3}}{K_{D1}} \frac{\partial \sigma_{bt}}{\partial z} \Big|_{z=z_1} = A_{2,l} \quad (18)$$

Обозначим также

$$h_0 - a - x = t_1. \quad (19)$$

Тогда уравнение (17) примет вид:

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + A_{1,I} \left( 1 - \frac{r-a}{t_1} \right) + A_{2,I} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0. \quad (20)$$

Будем искать решение дифференциального уравнения (20) в виде произведения двух функций от  $r$ :

$$\tau_{rz} = u(r)v(r). \quad (21)$$

После дифференцирования обеих частей равенства (21), и подстановки их в уравнение (20), получим:

$$u \left( \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) + v \frac{\partial u}{\partial r} = -A_{1,I} \left( 1 - \frac{r-a}{t_1} \right) - A_{2,I}. \quad (22)$$

Выберем функцию  $z$  такой, чтобы выражение в круглых скобках левой части уравнения (22) равнялось нулю. Тогда, после разделения переменных в этом выражении получим:

$$\frac{\partial v}{v} = -\frac{\partial r}{r}, \quad (23)$$

а после интегрирования –

$$\ln|v| = -\ln|r|, \quad (24)$$

или

$$v = r^{-1}. \quad (25)$$

Подставляя найденное значение  $v(r)$  в уравнение (22) и выполняя алгебраические преобразования, и интегрирование, получим:

$$u(r) = A_{1,I} \left( -\frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{3t_1} - \frac{ar^2}{2t_1} \right) + A_{2,I} \left( -\frac{r^2}{2} \right) + C_1. \quad (26)$$

После подстановки  $v(r)$  и  $u(r)$  в уравнение (21), получим:

$$\tau_{rz} = r^2 A_{3,I} + r A_{4,I} + \frac{C_1}{r}. \quad (27)$$

Здесь

$$A_{3,I} = A_{1,I} \frac{1}{3t_1}; \quad A_{4,I} = A_{1,I} \left( -\frac{1}{2} - \frac{a}{2t_1} \right) + A_{2,I} \left( -\frac{1}{2} \right); \quad (28)$$

Постоянная интегрирования  $C_1$  определяется из условия, в соответствии с которым при  $r = a$ ,  $\tau_{rz} = \tau_{r,I}$ . Здесь  $\tau_{r,I}$  – касательные напряжения в сечении I-I,

известные из стержневого железобетонного элемента при несовместных деформациях бетона и арматуры.

Тогда

$$C_1 = A_{1,I} \frac{a^2}{2} \left( 1 + \frac{a}{3t_1} \right) + A_{2,I} \frac{a^2}{2} + \tau_{r,I} a. \quad (29)$$

Применительно к околоарматурной зоне, прилегающей к поперечной трещине (сечения II-II), уравнение (27) будет иметь аналогичный вид. При этом

$$\left( \frac{\sigma_{bt}}{K_{D2}} - \frac{K_{D1}}{K_{D2}} \right) \frac{\partial \varepsilon_{z,II}}{\partial z} \Big|_{z=z_{II}} = A_{1,II} \quad \frac{\varepsilon_{z,II}}{K_{D2}} \frac{\partial \sigma_{bt}}{\partial z} \Big|_{z=z_{II}} - \frac{K_{D3}}{K_{D1}} \frac{\partial \sigma_{bt}}{\partial z} \Big|_{z=z_{II}} = A_{2,II} \quad (30)$$

Отличие параметров  $A_{3,II} - A_{5,II}$  и  $C_2$  будет заключаться в том, что в зависимостях (28) и (29) вместо  $t_1$  следует вставить  $t_b$ . Теперь, располагая компонентами напряженного состояния  $\tau_{rz}$ , можно переходить к рассмотрению второго дифференциального уравнения равновесия (11). Задачу проще решать в напряжениях. Из уравнения (15) следует, что

$$\sigma_\theta = \frac{1}{\mu(\lambda)} (\sigma_z - \varepsilon_z E(\lambda)) - \sigma_r. \quad (31)$$

Подставив выражение (31) и (27) в уравнение (11), получим дифференциальное уравнение, которое после алгебраических преобразований примет вид:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + r^2 B_1 + r B_2 + \frac{1}{r} B_{10} + 2 \frac{\sigma_r}{r} = B_{11}. \quad (32)$$

Здесь

$$B_1 = \frac{1}{3t_1} \frac{\partial A_{1,I}}{\partial z}; \quad (33)$$

$$B_2 = \left( -\frac{1}{2} - \frac{a}{2t_1} \right) \frac{\partial A_{1,I}}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial A_{1,I}}{\partial z} - \frac{E(\lambda)}{\mu(\lambda)} \frac{\varepsilon_{z,I}}{t_1}; \quad (34)$$

$$B_{10} = B_3 + B_4 + B_5 \left( 1 + \frac{a}{t_1} \right) + B_6 + B_7; \quad (35)$$

$$B_{11} = B_5 \frac{1}{t_1}; \quad (36)$$

$$B_3 = \frac{a^2}{2} \left( 1 + \frac{a}{3t_1} \right) \frac{\partial A_{1,I}}{\partial z} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial A_{2,I}}{\partial z}; \quad (37)$$

$$B_4 = -\frac{K_{D1}}{\mu(\lambda)}; \quad (38)$$

$$B_5 = \frac{1}{\mu(\lambda)} \frac{K_{D1} - \sigma_{bt}}{K_{D2}} \varepsilon_{z,l}; \quad (39)$$

$$B_6 = -\frac{K_{D3}}{\mu(\lambda)} \frac{K_{D1} - \sigma_{bt}}{K_{D2}}; \quad (40)$$

$$B_7 = \frac{E(\lambda)}{\mu(\lambda)} \varepsilon_{z,l} \left( 1 + \frac{a}{t_1} \right). \quad (41)$$

Решая дифференциальное уравнение (32) также будем отыскивать в виде произведения двух функций, которые после ряда аналогичных преобразований сводятся к следующему выражению:

$$\sigma_r = -\frac{r^3 B_1}{5} - \frac{r^2 B_2}{4} - \frac{B_{10}}{2} + \frac{r B_{11}}{3} + \frac{C_2}{r^2}. \quad (42)$$

Постоянную интегрирования  $C_2$  определяем из условия, в соответствии с которым при  $r = b_*$ ,  $\sigma_r = 0$ :

$$C_2 = \frac{b_*^5 B_1}{5} + \frac{b_*^4 B_2}{4} + \frac{b_*^3 B_{11}}{3} - \frac{b_*^2 B_{10}}{2}. \quad (43)$$

Здесь параметр  $b_*$  определяется из условия, в соответствии с которым при  $r = b_*$  местные напряжения  $\tau_{rz}$  в зоне, прилегающей к арматуре, уже затухают (т.е. равны нулю). Тогда из уравнения (27) следует:

$$b_*^2 A_{3,l} + b_* A_{4,l} + \frac{C_1}{b_*} = 0. \quad (44)$$

Зависимость (43) можно использовать для определения  $b_*$ . Учитывая, что градиент изменения этой функции весьма существен, то даже небольшие изменения  $b_*$  приводят к значительным изменениям  $\tau_{rz}$ . Численные исследования показывают, что при  $b_* = 3...4a$  значения  $\tau_{rz}$  можно считать приближающимся к нулю. Более того, при  $b_* > 4a$  наружный радиус околоарматурной зоны можно считать бесконечно большим (с погрешностью менее 6 %). При этом решение уже не связывается с формой внешнего контура. Таким образом, формулы (27), (31), (42) характеризуют распределение

напряжений для околоарматурной зоны с любой формой внешнего контура поперечного сечения железобетонного элемента.

Зная составляющие напряжений  $\sigma_z, \sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{rz}$ , определяем составляющие деформаций по формулам (13)-(16). Затем находим составляющие перемещений из зависимости Коши (12):

$$u = \int \varepsilon_r dr + f_1(z); \quad (45)$$

$$w = \int \varepsilon_z dz + f_2(r); \quad (46)$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\tau_{rz}}{G(\lambda)} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}. \quad (47)$$

Здесь  $\varepsilon_r, \varepsilon_z$  определяются в соответствии с уравнениями (13) и (3), а  $\tau_{rz}$  – по уравнению (27). Подставляя в уравнение (13) значения  $\sigma_z, \sigma_\theta$  и  $\sigma_r$  из зависимостей (9), (31) и (42) и выполняя алгебраические преобразования с учетом (45) и (46), получим:

$$u = \frac{1 + \mu(\lambda)}{E(\lambda)} \left[ -\frac{r^4}{20} B_1 - \frac{r^3}{12} B_2 + \frac{r^2}{6} B_{11} - \frac{r}{2} B_{10} - \frac{c_2}{r} + \frac{K_{D1} - \sigma_{bt}}{K_{D2}} \times \right. \\ \left. \times \left( \varepsilon_{z,I} r - \frac{\varepsilon_{z,I} (r-a)^2}{2t_1} - K_{D3} \right) + \varepsilon_{z,I} r \right] - \frac{\varepsilon_{z,I} (r-a)^2}{2t_1} + f_1(z) = D + f_1(z), \quad (48)$$

$$w = \left( 1 - \frac{r-a}{t_1} \right) \int \varepsilon_{z,I} dz \Big|_{z=z_1} + f_2(r). \quad (49)$$

Подставив перемещения (48) и (49) и напряжения (27) в уравнение (49), после алгебраических преобразований получим:

$$\frac{\partial f_1(z)}{\partial z} + \left[ -\frac{\partial f_2(r)}{\partial r} + \eta_1 r^4 + \eta_2 r^3 + \eta_3 (r-a)^2 + \eta_4 r^2 + \eta_5 r - \frac{2c_1}{r} \frac{1 + \mu(\lambda)}{E(\lambda)} \right] = \eta_8. \quad (50)$$

Здесь

$$\eta_1 = \frac{1 + \mu(\lambda)}{E(\lambda)} \left[ -\frac{1}{12t_1} \frac{\partial^2 A_{1,I}}{\partial z^2} \right]; \quad (51)$$

$$\eta_2 = -\frac{1 + \mu(\lambda)}{E(\lambda)} \left[ \left( -\frac{1}{6} - \frac{a}{6t_1} \right) \frac{\partial A_{z,I}}{\partial z} + \frac{1}{6t_1} \frac{\partial A_{2z,I}}{\partial z} + \frac{1}{3} \frac{E(\lambda)}{\mu(\lambda)} \frac{\varepsilon_{z,I}}{t_1} \right]; \quad (52)$$

$$\eta_3 = -\frac{1+\mu(\lambda)}{E(\lambda)} \left[ \frac{\partial \varepsilon_{z,I}}{\partial z} \left( \frac{\sigma_{bt}}{K_{D2}} - \frac{K_{D1}}{K_{D2}} \right) + \varepsilon_{z,I} \frac{1}{K_{D2}} \frac{\partial \sigma_{bt}}{\partial z} + \frac{K_{D3}}{K_{D2}} \frac{\partial \sigma_{bt}}{\partial z} \right] - \frac{1}{2t_1} \frac{\partial \varepsilon_{z,I}}{\partial z} \Big|_{z=z_1}; \quad (53)$$

$$\eta_4 = \frac{1+\mu(\lambda)}{E(\lambda)} \left[ -A_{3,I} + \frac{1}{2} \frac{1}{\mu(\lambda)} \left( \frac{\sigma_{bt}}{K_{D2}} - \frac{K_{D1}}{K_{D2}} \right) \frac{\varepsilon_{z,I}}{t_1} \right]; \quad (54)$$

$$\eta_5 = \frac{1+\mu(\lambda)}{E(\lambda)} \left[ A_{4,I} + \frac{a^2}{2} \left( 1 + \frac{a}{3t_1} \right) \frac{\partial A_{1,I}}{\partial z} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial A_{z,I}}{\partial z} - \frac{K_{D1}}{\mu(\lambda)} + \frac{1}{\mu(\lambda)} \frac{K_{D1} - \sigma_{bt}}{K_{D2}} \varepsilon_{z,I} \left( 1 + \frac{a}{t_1} \right) - \frac{K_{D3}}{\mu(\lambda)} \frac{K_{D1} - \sigma_{bt}}{K_{D2}} + \frac{E(\lambda)}{\mu(\lambda)} \varepsilon_{z,I} \left( 1 + \frac{a}{t_1} \right) - \frac{\partial \varepsilon_{z,I}}{\partial z} \left( \frac{\sigma_{bt}}{K_{D2}} - \frac{K_{D1}}{K_{D2}} \right) - \varepsilon_{z,I} \frac{1}{K_{D2}} \frac{\partial \sigma_{bt}}{\partial z} \right] + \frac{\partial \varepsilon_{z,I}}{\partial z} \Big|_{z=z_1}; \quad (55)$$

$$\eta_6 = \frac{1}{t_1} \left( \int \varepsilon_{z,I} dz \right) \Big|_{z=z_1}. \quad (56)$$

Заметим, что параметр  $\eta_8 = \text{const}$  тогда полученное уравнение (49) уместно только в том случае, если первое слагаемое и выражение, записанное в квадратных скобках, постоянны:

$$\frac{\partial f_1(z)}{\partial z} = C_3, \quad (57)$$

$$-\frac{\partial f_2(r)}{\partial r} + \eta_1 r^4 + \eta_2 r^3 + \eta_3 (r-a)^2 + \eta_4 r^2 + \eta_5 r - \frac{2C_1}{r} \frac{1+\mu(\lambda)}{E(\lambda)} = C_4 \quad (58)$$

кроме того, из уравнения (49) возникает следующая зависимость между постоянными:

$$C_3 + C_4 = \eta_8. \quad (59)$$

Интегрируем уравнения (56) и (57) и подставляя найденные функции в формулы (47) и (48), получим:

$$u = D + C_3 z + C_5; \quad (60)$$

$$w = \left( 1 - \frac{r-a}{t_1} \right) \left( \int \varepsilon_{z,I} dz \right) \Big|_{z=z_1} + \eta_1 \frac{r^5}{5} + \eta_2 \frac{r^4}{4} + \eta_3 \frac{(r-a)^3}{3} + \eta_4 \frac{r^3}{3} + \eta_5 \frac{r^2}{2} - 2C_1 \frac{1+\mu(\lambda)}{E(\lambda)} \ln r - C_4 r + C_6 \quad (61)$$

В формуле (59) обозначение  $D$  раскрывается из выражения (47).

Для определения произвольной постоянной  $C_6$  используются следующие граничные условия :

При  $r = a$  и  $z = z_1$ ,  $w = 0$  – точка отсчета перемещений при решении задачи сопротивления около арматурной зоны.

Тогда из (60) следует, что

$$C_6 = C_4 a - E. \quad (62)$$

Здесь:

$$E = \left( \int \varepsilon_{z1} dz \right) \Big|_{z=z_1} + \eta_1 \frac{a^5}{5} + \eta_2 \frac{a^4}{4} + \eta_4 \frac{a^3}{3} + \eta_5 \frac{a^2}{3} - 2C_1 \frac{1 + \mu(\lambda)}{E(\lambda)} \ln a \quad (63)$$

Будем использовать и другие граничные условия.

При  $r = a$  и  $z = z_1$ ,  $\gamma_{rz} = \varepsilon_{q1}$ . Отсюда следует, что

$$C_3 = C_4 + \varepsilon_{q1} - E_1 - H_1. \quad (64)$$

Здесь

$$E_1 = -\frac{1}{t_1} \left( \int \varepsilon_{z1} dz \right) \Big|_{z=z_1} + \eta_1 a^4 + \eta_2 a^3 + \eta_4 a^2 + \eta_5 a - 2C_1 \frac{1 + \mu(\lambda)}{E(\lambda)} \frac{1}{a} \quad (65)$$

$$H_1 = \frac{1 + \mu(\lambda)}{E(\lambda)} \left[ -\frac{a^4}{20} \frac{\partial B_1}{\partial z} - \frac{a^3}{12} \frac{\partial B_2}{\partial z} - \frac{a}{2} \frac{\partial B_{10}}{\partial z} + \frac{a^2}{6} \frac{\partial B_{11}}{\partial z} - \frac{1}{a} \frac{\partial C_2}{\partial z} - a A_{1,z} + a \frac{\partial \varepsilon_{z1}}{\partial z} \right] \quad (66)$$

$\varepsilon_{q1}$  – относительное взаимное смещение арматуры и бетона при  $r = a$  и  $z = z_1$ , можно приравнять перемещение  $u$  отыскиваемое по формуле (59) и по формуле  $u = \varepsilon_{\theta} r$  (см. формулы (12), (14)):

$$D_1 + C_3 z_1 + C_5 = \varepsilon_{\theta} a \quad (67)$$

Отсюда следует

$$C_5 = \varepsilon_{\theta} a - D_1 - C_3 z_1 \quad (68)$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Верюжский Ю. В., Колчунов В. И. Методы механики железобетона. Учебное пособие. – К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005. – 653 с.