УДК 512.546

Е. Г. ЗЕЛЕНЮК, асп. (Киев. ун-т),
А. Г. ПИСКУНОВ, канд. физ.-мат. наук
(Киев. специализир. предприятие вычислит. техники и информатики)

Минимально неметризуемые группы

Некомпактная локально компактная абелева группа называется минимально неметризуемой, если все ее фактор-группы по некомпактным замкнутым подгрупам метризуемы но сама группа неметризуема. Доказано, что существование минимально неметризуемых групп не зависит от системы аксиом Цермело — Френкеля, обычных аксиом теории множеств. Тем самым показано, что вопрос В. М. Полецких об описании локально-компактных абелевых групп, все не σ-компактные замкнутые подгруппы которых открыты, неразрешим «наивно».

Некомпактна локально компактна абелева група називається мінімально неметризуемою, якщо всі її фактор-групи по некомпактним замкненим підгрупам метризуемі, але сама група неметризуема. Доведено, що існування мінімально неметризуемих підгруп не залежить від системи аксіом Цермело — Френкеля, звичайних аксіом теорії множин. Цим самим показано, що питання В. М. Полецьких про описання локально компактных абелевих груп, всі не σ-компактні замкнені підгрупи яких відкриті, нерозв'язне «наївно».

В настоящей работе рассматривается задача В. М. Полецких [1, VII.8]: описать локально компактные абелевы группы, все не σ-компактные замкнутые подгруппы которых открыты.

В двойственном варианте эта задача формулируется следующим образом: описать локально компактные абелевы группы, все фактор-группы которых по некомпактным замкнутым подгруппам метризуемы.

Очевидно, что к таким группам относятся все компактные и все метризуемые локально компактные абелевы группы — это тривиальные примеры. Нас будут интересовать неметризуемые некомпактные локально компактные абелевы группы с метризуемыми фактор-группами по некомпактным замкнутым подгруппам. Такие группы будем называть минимально неметризуемыми. Покажем, что существование минимально неметризуемых групп не зависит от системы ZFC обычных аксиом теории множеств Цермело — Френкеля. Тем самым будет установлено, что задача В. М. Полецких не разрешима «наивно».

Отметим некоторые свойства минимально неметризуемых групп.

1. Каждая минимально неметризуемая группа компактно покрываема.

2. Каждая неметризуемая фактор-группа минимально неметризуемой группы минимально неметризуема. В частности, каждая фактор-группа минимально неметризуемой группы по метризуемой замкнутой подгруппе минимально неметризуема.

3. Каждая некомпактная замкнутая подгруппа минимально неметризуемой группы минимально неметризуема.

4. Каждая неметризуемая замкнутая подгруппа минимально неметризуемой группы, выделяющаяся в ней топологически прямым сомножителем, минимально неметризуема.

Лемма. *Минимально неметризуемая группа существует тогда и только тогда, когда для некоторого простого числа p существует такая бесконечная подгруппа X из $C_p^{\omega_1}$, что для каждой бесконечной подгруппы Y из X фактор-группа $C_p^{\omega_1}/\overline{Y}$ метризуема, где $C_p^{\omega_1}$ — тихоновское произведение ω_1 экземпляров циклической группы C_p порядка p, а $\overline{Y}$ — топологическое замыкание множества Y в пространстве $C_p^{\omega_1}$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть G_1 — минимально неметризуемая группа, G_0 — компонента связности G_1. Докажем, что G_0 метризуема. Допустим противное и рассмотрим группу $G_1^*/A(G_1^*, G_0)$, где G_1^* — группа, двойственная к G_1, а $A(G_1^*, G_0)$ — аннулятор G_0 в G_1^*. Она является двойственной к G_0. Так как G_0 связна, компактна (компактность G_0 следует из ее связности и компактной покрываемости) и по предположению неметризуема, то $G_1^*/A(G_1^*, G_0)$ — несчетная дискретная группа без кручения. Выберем в ней несчетное независимое * подмножество M и обозначим через D подгруппу, порожденную множеством $s(M)$, где $s\colon G_1^*/A(G_1^*, G_0) \to G_1^*$ — сечение канонического гомоморфизма $G_1^* \to G_1^*/A(G_1^*, G_0)$. По построению D — несчетная дискретная подгруппа из G_1^*. Значит, $A(G_1, D)$ — некомпактная замкнутая подгруппа из G_1, фактор-группа по которой неметризуема,— противоречие. Следовательно, G_0 метризуема. Профакторизуем теперь G_1 по G_0 и получим нульмерную минимально неметризуемую группу G_2. Разлагая G_2 в прямое произведение силовских подгрупп с отмеченной открытой компактной подгруппой и выделяя неметризуемый сомножитель, можно считать, что G_2 — нульмерная минимально неметризуемая p-группа.

Пусть K — открытая компактная подгруппа из G_2. Тогда K^* — несчетная дискретная p-группа. Множество элементов порядка p образует в K^* несчетную подгруппу L. Но тогда $K/A(K, L)$ — неметризуемая компактная группа периода p, являющаяся открытой подгруппой в $G_2/A(K, L)$. Но $K/A(K, L)$ дополняема в группе, образованной всеми элементами из $G_2/A(K, L)$ порядка p. Причем ясно, что все подгруппы, ее дополняющие,

---

* Подмножество M элементов дискретной группы G называется независимым, если для любых $g_1, \ldots, g_k \in M$ и целых чисел $z_1, \ldots, z_k$ из $z_1g_1 + \ldots + z_kg_k = 0$ следует $z_1g_1 = \ldots = z_kg_k = 0$.

дискретны. Профакторизуем $G_2/A\ (K,\ L)$ по одной из них и получим минимально неметризуемую p-группу G_3, в которой элементы порядка p образуют открытую компактную подгруппу G_4.

Докажем, что для некоторого $n > 1$ группа, порожденная всеми элементами из G_3 порядка p^n, будет некомпактной (то, что она замкнута, очевидно) и, следовательно, минимально неметризуемой. Допустим противное и рассмотрим последовательность множеств S_n, $n = 2, 3, \ldots$, всех элементов из G_3 порядка p^n. Каждый член этой последовательности — непустой компакт. Определим отображения $\psi_{ij}\colon S_j \to S_i$, $j \geqslant i = 2, 3, \ldots$, полагая $\psi_{ij}(x) = p^{j-1}x$. Ясно, что все ψ_{ij} непрерывны и $\psi_{ij}\psi_{jk} = \psi_{jk}$, $k \geqslant j \geqslant i = 2, 3, \ldots$. Тем самым определена обратная последовательность непустых компактов. Пусть $(x_2, x_3, \ldots)$ — элемент ее предела, ведь предел этот непустой, $S = \langle x_2, x_3, \ldots \rangle$ — подгруппа из G_3, алгебраически порожденная элементами $x_2, x_3, \ldots$. По построению подгруппа S — квазициклическая, в частности, замкнута и некомпактна. Но тогда S минимально неметризуема,— противоречие. Итак, можно считать, что G_3 имеет ограниченный период. Значит, ограниченный период имеет и G_3/G_4. Кроме того, G_3/G_4 бесконечна. Но тогда в G_3/G_4 бесконечным будет и слой элементов порядка p. А это означает, что слой элементов порядка p^2 в G_3 некомпактен. Тем самым получаем минимально неметризуемую группу G периода p^2, в которой элементы порядка p образуют открытую компактную подгруппу. Можно считать, что подгруппа эта есть $C_p^{\omega_1}$.

Пусть теперь $X = pG = \{pg : g \in G\} \subset C^{\omega}_{p_1}$, Y — произвольная бесконечная подгруппа из X. Выберем в Y какой-либо базис $\{Y_i : i \in I\}$. Затем каждому Y_i, $i \in I$, сопоставим такой $g_i \in G$, что $pg_i = Y_i$, и обозначим через N подгруппу, алгебраически порожденную $\{g_i : i \in I\}$. Покажем, что $\overline{N} \cap C_p^{\omega_1} = \overline{Y}$. Достаточно доказать, что $N \cap C_p^{\omega_1} = Y$. Включение $Y \subseteq N \cap C_p^{\omega_1}$ очевидно. Проверим $N \cap C_p^{\omega_1} \subset Y$. Пусть $g_1, \ldots, g_k$ — различные элементы системы $\{g_i : i \in I\}$, $z_1, \ldots, z_k$ — целые числа, $z_1g_1 + \ldots + z_kg_k \in C_p^{\omega_1}$. Тогда $p\ (z_1g_1 + \ldots + z_kg_k) = 0$, откуда $z_1y_1 + \ldots + z_ky_k = 0$. Значит, числа $z_1, \ldots, z_k$ кратны p. А значит, $z_1g_1 + \ldots + z_kg_k \in Y$. Далее, подгруппа $\overline{N}$ некомпактна. Тогда фактор-группа $G'/\overline{N}$ метризуема. Но тогда метризуема и фактор-группа $G \cap C_p^{\omega_1}/\overline{N} \cap C_p^{\omega_1} = C_p^{\omega_1}/\overline{Y}$.

Достаточность. Рассмотрим группу $C_{p^2}^{\omega_1}$. Выделим в ней подгруппу $H = pC_{p^2}^{\omega_1}$ — подгруппу, образованную всеми элементами порядка p. Ясно, что H топологически изоморфна $C_p^{\omega_1}$. Пусть X — такая бесконечная подгруппа из H, что для каждой бесконечной подгруппы Y из X фактор-группа $H/\overline{Y}$ метризуема. Обозначим через G подгруппу из $C_{p^2}^{\omega_1}$ всех таких элементов g, что $pg \in X$. Очевидно, что H — подгруппа G. Объявим ее открытой подгруппой в G. При такой топологизации группа G будет минимально неметризуемой. В самом деле, ясно, что G не компактна, неметризуема и локально компактна. Пусть N — произвольная некомпактная замкнутая подгруппа из G. Тогда подгруппа $Y = pN$ из X бесконечна. По условию фактор-группа $H/\overline{Y}$ метризуема. Следовательно, метризуемой будет и фактор-группа $G/\overline{Y}$. А так как $\overline{Y} \subseteq N$, то метризуема и фактор-группа G/H.

Далее нам понадобится дополнительный теоретико-множественный принцип, совместимый с ZFC,— вариант леммы Буса LB $(\aleph_1')$: каждый фильтр на счетном множестве с базой мощности $\aleph_1$ усиливается до фильтра со счетной базой [2].

Теорема 1. *В предположении* LB $(\aleph_1')$ *минимально неметризуемой группы не существует.*

Доказательство. Пусть X — бесконечная подгруппа из $C_p^{\omega_1}$. По лемме достаточно найти такую бесконечную подгруппу Y из X, что фактор-группа $C_p^{\omega_1}/\overline{Y}$ неметризуема. Подгруппу X можно считать счетной. Для $\alpha \in \omega_1$, $i \in C_p$, обозначим $X_\alpha^i = \{x \in X\colon x(\alpha) = i\}$. При каждом α множества X_α^i, $i \in C_p$, образуют конечное разбиение X. Возьмем свободный ультрафильтр U на X и каждому $\alpha \in \omega_1$ отнесем такой $i(\alpha) \in C_p$, что $X_\alpha^{i(\alpha)} \in$

$\in U$. Множества $X_\alpha^{i(\alpha)}$, $\alpha \in \omega_1$, порождают фильтр на X, с базой мощности $\leqslant \aleph_1$. По LB $(\aleph_1)$ этот фильтр усиливается до фильтра со счетной базой. Следовательно, в X найдется такая последовательность $\{x_n\}$, что для каждого $\alpha \in \omega_1$ все члены последовательности $\{x_n\}$, начиная с некоторого номера n_α, содержатся в $X_\alpha^{i(\alpha)}$. Но тогда найдутся такие несчетное подмножество $E \subseteq \subseteq \omega_1$ и номер n^*, что для каждого $\alpha \in E$, все члены последовательности $\{x_n\}$, начиная с номера n^*, содержатся в $X_\alpha^{i(\alpha)}$. Пусть теперь $Y = \langle x_{n+1^*} - - x_{n^*}, x_{n^*+2} - x_{n^*} \dots \}$. Заметим, что подгруппа Y бесконечна и для любых $y \in Y, \alpha \in E$ $y(\alpha) = 0$. Но тогда $y(\alpha) = 0$ и для любых $y \in \overline{Y}, \alpha \in E$. А значит, фактор-группа $C_p^{\omega_1}/\overline{Y}$ неметризуема.

Теорема 2. *В предположении континуум-гипотезы* СН *минимально неметризуемая группа существует.*

Доказательство. Пусть L — счетная группа периода 2, A_α, $\alpha < \omega_1$,— пересчет всех бесконечных подгрупп группы L. В начале построим ω_1 — последовательность гомоморфизмов $l_\alpha : L \to C_2$, $\alpha < \omega_1$, такую, что как только $\alpha_0 \leqslant \alpha_1 < \dots < \alpha_k < \omega_1$, то диагональ $l_{\alpha_1 \dots \alpha_k} : L \to C_2^k$ произведения гомоморфизмов $l_{\alpha_1}, \dots, l_{\alpha_k}$ отображает подгруппу A_α из L на C_2^k.

Фиксируем $y < \omega_1$ и предположим, что для каждого $\alpha < y$ l_α уже построен (l_0 строится очевидным образом). Займемся построением l_y. Пусть $\mathfrak{B}$ — семейство подмножеств группы L вида A_α, где $\alpha \leqslant y$, либо $A_{\alpha_0} \cap \cap\, l_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^{-1}(x)$, где $\alpha_0 \leqslant \alpha_1 < \dots < \alpha_k < y$, $x \in C_2^k$. Каждое $B \in \mathfrak{B}$ бесконечно, само $\mathfrak{B}$ счетно. Покажем следующее: в L найдутся непересекающиеся подмножества E, E' такие, что множество $E \cup E'$ независимое и для каждого $B \in \mathfrak{B}$, $E \cap B \neq \varnothing$, $E' \cap B \neq \varnothing$. С этой целью занумеруем натуральными числами элементы семейства $\mathfrak{B} = \{B_1, B_2, \dots\}$ и построим индуктивно две последовательности $\{e_n\}$, $\{e_n'\}$ такие, что

$$e_1 \in B_1 \setminus \{0\}, \quad e_1' \in B_1 \setminus \langle e_1 \rangle,$$

$$e_{n+1} \in B_{n+1} \setminus \langle e_1, e_1', \dots, e_n, e_n' \rangle, \quad e_{n+1}' \in B_{n+1} \setminus \langle e_1, e_1', \dots, e_n, e_n', e_{n+1} \rangle,$$

$$n = 1, 2, \dots$$

Тогда множества $E = \{e_1, e_2, \dots\}$, $E' = \{e_1', e_2', \dots\}$ будут требуемыми. Для каждого $g \in E$ положим $l_y(g) = 0$, а для каждого $g \in E'$ — $l_y(g) = 1$. Затем продолжим отображение $l_y : E \cup E' \to C_2$ до гомоморфизма $l_y : L \to C_2$.

Далее, рассмотрим диагональ $f : L \to C_2^{\omega_1}$ произведения гомоморфизмов l_α, $\alpha < \omega_1$, и подгруппу $X = l(L)$ из $C_2^{\omega_1}$. Пусть Y — произвольная бесконечная подгруппа из X. Для некоторого $\alpha_0 < \omega_1$, $Y = l(A_{\alpha_0})$. Обозначим через p проекцию на второй сомножитель произведения $C_2^{\alpha_0} x \times \times C_2^{\omega_1 \setminus \alpha_0} = C_2^{\omega_1}$ и заметим, что подгруппа $p(Y)$ плотна в $C_2^{\omega_1 \setminus \alpha_0}$. Тем более плотной будет подгруппа $p(\overline{Y})$ и, так как $p(\overline{Y})$ замкнута, $p(\overline{Y}) = = C_2^{\omega_1 \setminus \alpha_0}$. Но тогда подгруппы $\overline{Y}$ и $C_2^{\alpha_0}$ совместно порождают $C_2^{\omega_1}$ (алгебраически). Следовательно, $|C_2^{\omega_1} / \overline{Y}| \leqslant |C_2^{\alpha_0}| \leqslant 2^\omega$ и, значит, фактор-группа $C_2^{\omega_1}/\overline{Y}$ метризуема. Осталось применить лемму.

1. *Нерешенные* задачи топологической алгебры / Под ред. В. И. Арнаутова и др.— Кишинев: Штиинца, 1985.— 37 с.
2. *Малыхин В. И.* Топология и форсинг // Успехи мат. наук.— 1983.— 38, вып. 1.— С. 69—118,

Получено 05.06.90