УДК 512.546

А. Г. Пискунов

Мощность открытых σ-компактных множеств в пространстве некомпактных подгрупп топологической группы

В работе доказано: пространство $\mathfrak{L}(G)$ локально компактной группы G σ-компактно тогда и только тогда, когда G — σ-компактная группа со счетным числом некомпактных подгрупп. (Ответ на вопрос 8.62 [1].)

Условимся под топологической группой понимать локально компактную группу, а под ее подгруппой — замкнутую подгруппу. Считаем, что $\mathfrak{L}(G)$ — пространство всех подгрупп группы G. Далее, $n\mathfrak{K}(G) \subset \mathfrak{L}(G)$ — подпространство всех некомпактных подгрупп, $[H, L] = \{X \in \mathfrak{L}(G);\ H \subset X \subset L\}$.

Все указанные множества рассматриваются с топологией Виеториса. Открытую предбазу этой топологии образуют множества:

$$D_1(U) = \{H \in \mathfrak{L}(G),\ H \subset U\},\ \ D_2(V) = \{H \in \mathfrak{L}(G),\ H \cap V \neq \varnothing\},$$

где U, V — пробегают все открытые подмножества G.

Напомним, что $[H, L]$ — замкнутое подмножество $\mathfrak{L}(G)$ [2]. Далее, считаем, что ω_1 — первое несчетное трансфинитное число, $A \setminus B$ — разность множеств A и B, $\langle S \rangle$ — наименьшая замкнутая подгруппа, содержащая множество $S \subset G$.

В предлагаемом доказательстве существенную роль играет понятие счетного псевдохарактера. Напомним его: подмножество топологического T_1-пространства X называется множеством счетного псевдохарактера (типа G_δ) в X, если оно представимо в виде пересечения счетного числа открытых множеств. Если каждая точка T_1-пространства X есть точка счетного псевдохарактера, то X назовем пространством счетного псевдохарактера.

Лемма 1. *Пусть открытое в $n\mathfrak{K}(G)$ множество $\mathfrak{W}$ является подпространством счетного псевдохарактера в $\mathfrak{L}(G)$. Если $\mathfrak{W}$ σ-компактно, то его мощность счетная.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{W}$ является σ-компактным множеством и его мощность несчетная. Представим $\mathfrak{W}$ в виде счетного объединения компактов $\mathfrak{W} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathfrak{W}_i$. Один из компактов $\mathfrak{W}_j = \mathfrak{W}$ должен иметь несчетную мощность. Тогда согласно теореме 2 [3, с. 240] $\mathfrak{K}$ содержит точку полного накопления K_1. По следствию 1 [4] K_1 будет предельной точкой для множества собственных подгрупп из $\mathfrak{K} \subset n\mathfrak{K}(G)$. Так как K_1 — точка счетного псевдохарактера, то она должна иметь открытую окрестность $\mathfrak{U}_1$, которая отделяет от K_1 несчетное число точек компакта $[\langle e\rangle, K_1] \cap \mathfrak{K}$. (Иначе счетное пересечение окрестностей отделит от K_1 только счетное число точек $[\langle e\rangle, K_1] \cap \mathfrak{K}$.) Значит, множество $\mathfrak{K}_2 = ([\langle e\rangle, K_1] \cap \mathfrak{K}) \setminus \mathfrak{U}_1$ замкнутое и имеет несчетную мощность. Компакт $\mathfrak{K}_2$, в свою очередь, имеет точку полного накопления K_2. По построению $K_1 \supset K_2$ и т. д. Получили, что на каждом конечном шаге n группа K_n имеет несчетное число некомпактных подгрупп из компакта $[\langle e\rangle, K_n] \cap \mathfrak{K}$. Поэтому можно взять следующую точку полного накопления K_{n+1}, так что $K_{n\pm 1} \subset K_n$. Но согласно теореме 1 [5] в компакте $\mathfrak{K}$ любая убывающая цепь должна оборваться на конечном шаге. Из предположения о несчетной мощности $\mathfrak{W}$ получили противоречие. Следовательно, $\mathfrak{W}$ имеет счетную мощность.

Лемма 2. *Пусть $\{P_\alpha, \alpha < \omega_1\}$ — вполне упорядоченная по убыванию цепь компактных подгрупп типа G_δ. Пусть некоторая подгруппа $H \supset \bigcap_{\alpha<\omega_1} P_\alpha$ и не содержит ни одной группы P_α. Тогда H не типа G_δ.*

Доказательство. Пусть $U \supset H$ — произвольное открытое множество. По условию $\bigcap_{\alpha<\omega_1} P_\alpha \subset H \subset U$ и, значит, $\bigcap_{\alpha<\omega_1} P_\alpha \cap (G \setminus U) = \varnothing$. В силу компактности P_1 найдется группа P_γ, $\gamma < \omega_1$, содержащаяся в U.

Возьмем теперь произвольную счетную систему окрестностей подгруппы H $\{U_i, i \geqslant 1\}$. Через $\gamma_i < \omega_1$ обозначим номер первой группы из $\{P_\alpha, \alpha < \omega_1\}$, содержащейся в U_i. По теореме 17 [3, с. 69], первое число γ, следующее за всем множеством $\{\gamma_i, i \geqslant 1\}$, счетное. Поэтому для группы с номером γ выполняется $P_\gamma \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} P_{\gamma_i} \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$. Так как H не содержит P_γ, то $H \neq \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$. В силу произвольного выбора U_i получаем, что H—не типа G_δ.

Лемма 3. Пусть H — *произвольная σ-компактная группа из G. Тогда для любого счетного семейства $\{U_i, i \geqslant 1\}$ окрестностей единицы найдется компактная, перестановочная с H группа P типа G_δ в G, такая, что $P \subset \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$.*

Доказательство (см. теорему 8.7 [6]). Можно записать $H = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$, где $\{F_i, i \geqslant 1\}$ есть некоторая возрастающая последовательность компактов в G. Пусть V_0 — предкомпактная окрестность единицы G. Используя теоремы 4.5 и 4.9 [6], строим последовательность $\{V_i, i \geqslant 1\}$ симметричных окрестностей единицы такую, что $V_i^2 \subset V_{i-1} \cap U_i$ и $xV_ix^{-1} \subset V_{i-1}$ для любого $x \in F_i$, $i \geqslant 1$. Как и при доказательстве следствия из теоремы 4.6 [6] имеем $\overline{V}_i \subset V_{i-1}$. Ясно, что $P = \bigcap_{i=1}^{\infty} V_i \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$ и по теореме 5.6 [6] P есть замкнутая подгруппа G. В силу $P \subset \overline{V}_0$ она компактна. Далее, пусть $p \in P$, $h \in H$. По выбору окрестностей V имеем $hph^{-1} \subset hV_{i+1}h^{-1} \subset V_i$. И поскольку $V_i \supset P$ произвольная, имеем $hph^{-1} \in P$. Поэтому P перестановочна с H.

Теорема 1 (доказана совместно с В. М. Полецких). *Точка $H \in \mathfrak{L}(G)$ есть точка счетного псевдохарактера тогда и только тогда, когда H—σ-компактна и содержит P—компактную, инвариантную в H подгруппу типа G_δ в G с условием: если A — собственная подгруппа H, то и AP — собственная подгруппа H.*

Необходимость. По определению топологии Виеториса точку H можно представить в виде следующего пересечения счетного числа открытых множеств из предбазы: $H = \bigcap_{i=1}^{\infty} \left(D_1(V_i) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{i} D_2(h_j W'_j) \right) \right)$, где $h_j \in H$, V_j — открытые окрестности H в G, W'_j — окрестности единицы. Тогда по условию $H = \langle h_i, i \geqslant 1 \rangle$. Поскольку H — сепарабельная и локально компактная группа, то H — σ-компактная. И, значит, $H = \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i$, где H_i — компакты, $H_i \subset H_{i+1}$. С учетом компактности H_i заменим окрестности W'_i на окрестности единицы W_i, удовлетворяющие условиям $W_i \supset W_{i+1}$, $W'_i \supset W_i$, $V_i \supset H_j W_j$ для $j \geqslant i$. По лемме 3 в G найдется компактная, перестановочная с H группа P такая, что $P \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} W_i$ и P типа G_δ в G. Далее, $V_i \supset H_j W_j \supset H_j P$ при $j \geqslant i$. Отсюда $V_i \supset HP$ и, следовательно, по условию $HP = H$. Для $A \subset H$, $A \neq H$ выполнено $A \cap h_j W_j = \varnothing$ для некоторого j. Но тогда $A \cap h_j P = \varnothing$. И, значит, $AP \not\ni h_j$. Таким образом, AP — собственная подгруппа H.

Достаточность. Поскольку P типа G_δ, то существуют предкомпактные окрестности единицы $\{W_i, i \geqslant 1\}$ такие, что $P = \bigcap_{i=1}^{\infty} W_i$, $\overline{W_{i+1}} \subset W_i$.

В силу того, что в локально компактном пространстве точка счетного псевдохарактера обладает счетной локальной базой (упражнение 68 [7, с. 144]), фактор-группа H/P метризуемая. Кроме того, H/P — σ-компактна, и, поэтому, сепарабельна. Значит, $H = \langle P, h_{i_k}, i \geqslant 1 \rangle$ для некоторого множества точек $\{h_i, i \geqslant 1\} \subset H$. Далее, $\mathfrak{S} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcap_{i=1}^{k} D_2(h_i W_k) = [H, G]$. В самом деле, если $A \in \mathfrak{S}$, то $A \cap h_i W_k \neq \varnothing$, $i = \overline{1, k}$. Но тогда в силу компактности $\overline{W}_1$ $A \cap h_j P \neq \varnothing$, т. е. $\{h_i, i \geqslant 1\} \subset (A \cap H) P$ и, следовательно, $\langle P, h_i, i \geqslant 1 \rangle = H \subset (A \cap H) P$. Но по условию $H \subset A \cap H \subset A$, т. е. $A \in [H, G]$. Включение $[H, G] \subset \mathfrak{S}$ следует из определения топологии. С другой стороны, по определению топологии Виеториса получаем

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} D_1(HW_i) = D_1\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} HW_i \right) = D_1(HP) = D_1(H) = [\langle e \rangle, H].$$

Итак, $H = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left(D_1(HW_k) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{k} D_2(h_i W_k) \right) \right)$, значит H — точка счетного псевдохарактера.

Следствие 1. *σ-компактная подгруппа H — точка счетного псевдохарактера в $[H, G]$ тогда и только тогда, когда она есть подгруппа типа G_δ в G.*

Следствие 2. *H — точка счетного псевдохарактера в $[\langle e \rangle, H]$ тогда и только тогда, когда H — σ-компактна и содержит P — компактную, инвариантную в H, типа G_δ в H подгруппу с условием: если A — собственная подгруппа H, то и AP — собственная подгруппа H.*

Лемма 4. *Если пространство $n\mathfrak{R}(G)$ σ-компактной группы G, содержит точку несчетного псевдохарактера, то в любой окрестности этой точки найдется некомпактная подгруппа не типа G_δ в G.*

Доказательство. По теореме 1 H либо сама не типа G_δ в G, либо для любой компактной, инвариантной в H, типа G_δ в G подгруппы P H содержит собственную подгруппу Z такую, что $ZP = H$.

Возьмем произвольную окрестность точки H в $n\mathfrak{R}(G) : \mathfrak{W} = D_1(U) \cap \cap D_2(h_1 V_1) \cap \ldots \cap D_2(h_k V_k)$, где $h_i \in H$ и V_i — окрестности $e \in G$, $i = \overline{1, k}$. По лемме 3 в $U \cap V_1 \cap \ldots \cap V_k \cap H$ найдется компактная, инвариантная в H группа P_1 типа G_δ в G. По условию для P_1 в H найдется собственная подгруппа Z_1 такая, что $Z_1 P_1 = H$. (Заметим, что любая L с условием

$LP_1 = H$ принадлежит $\mathfrak{W}$). Предположим, что для некоторого счетного трансфинитного числа $\beta < \omega_1$ построены два множества $\{Z_\alpha\}$, $\{P_\alpha\}$, $\alpha < \beta$. Все Z_α типа G_δ. Тогда, если β — предельное число, то группу $\bigcap\limits_{\alpha<\beta} P_\alpha$ обозначим через P_β. А если β — непредельное число, то в качестве P_β возьмем $\bigcap\limits_{\alpha<\beta} P_\alpha \cap R_\beta$, где R_β—инвариантная в H, типа G_δ компактная группа из $Z_{\beta-1}$. Через Z_β обозначим произвольную подгруппу H такую, что $Z_\beta P_\beta = H$. Если Z_β — не типа G_δ, то она искомая, так как $H = Z_\beta P_\beta \subset Z_\beta P_\beta P_1 = Z_\beta P_1$. В противном случае построение множеств подгрупп продолжаем дальше.

Итак, считаем, что мы получили два несчетных множества подгрупп $\{Z_\alpha\}$, $\{P_\alpha\}$, $\alpha < \omega_1$. По построению эти подгруппы обладают следующими свойствами: $Z_\alpha P_\alpha = H$, $P_\alpha \subset Z_\beta$ $\forall \beta < \alpha < \omega_1$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_k < \omega_1$ — произвольные числа, $g \in H$ — произвольная точка. Тогда имеем

$$g = z_1 p_1, \quad z_1 \in Z_{\alpha_1}, p_1 \in P_{\alpha_1} \subset \bigcap_{\alpha<\alpha_1} Z_\alpha,$$

$$z_1 = z_2 p_2, \quad z_2 \in Z_{\alpha_2}, p_2 \in P_{\alpha_2} \subset \bigcap_{\alpha<\alpha_2} Z_\alpha,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$z_{k-1} = z_k p_k, \quad z_k \in Z_{\alpha_k}, p_k \in P_{\alpha_k} \subset \bigcap_{\alpha<\alpha_k} Z_\alpha.$$

Отсюда получаем

$$z_k = z_k \qquad \in Z_{\alpha_k},$$

$$z_k = z_{k-1} p_k^{-1} \qquad \in Z_{\alpha_{k-1}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$z_k = z_1 p_2^{-1} p_3^{-1} \ldots p_k^{-1} \quad \in Z_{\alpha_1},$$

$$z_k = g p_1^{-1} p_2^{-1} p_3^{-1} \ldots p_k^{-1} \in g P_1,$$

т. е. $z_k \in \bigcap\limits_{i=1}^{k} Z_{\alpha_i} \cap g P_1 \neq \varnothing$. Так как $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, g$ произвольные, то в силу компактности gP_1 получаем, что пересечение $Z \cap gP_1$, $Z = \bigcap\limits_{\alpha<\omega_1} Z_\alpha$ не пусто. Тогда $ZP_1 \ni g$. Поэтому в силу произвольности $g \in H$. $H = ZP_1$. Так как Z не содержит ни одной подгруппы P_α, $\alpha < \omega_1$, то по лемме 2 она не типа G_δ. В силу выбора Z принадлежит $\mathfrak{W}$ и поэтому искомая.

Следствие 1. *$n\mathfrak{R}(G)$ — пространство счетного псевдохарактера тогда и только тогда, когда каждая некомпактная подгруппа $H \subset G$ — типа G_δ в G.*

Следующая теорема принадлежит Ю. А. Комарову (лемма 2 [8]) и В. М. Полецких.

Теорема 2. *Некомпактная σ-компактная подгруппа H обладает в $n\mathfrak{R}(G)$ окрестностью из собственных подгрупп тогда и только тогда, когда она типа G_δ в G.*

Доказательство. Необходимость. Так как H — σ-компактна и типа G_δ, то по лемме 3 в H существует компактная, инвариантная в H типа G_δ в G группа P. P обладает счетной определяющей системой окрестностей $\{U_n,\ n \geqslant 1,\ V_n \supset V_{n+1}\}$. Далее дословно повторить рассуждения леммы 2 [8].

Достаточность. Пусть H — подгруппа, обладающая окрестностью из собственных подгрупп $\mathfrak{U}$. Тогда $\mathfrak{U} \cap [H, G] = H$, и по следствию 1 теоремы 1 H есть группа типа G_δ в G.

Лемма 5. *В любой окрестности точки несчетного псевдохарактера из $n\mathfrak{R}(G)$ — σ-компактной группы G, найдется замкнутая, вполне упо-*

рядоченная по убыванию, несчетная цепь подгрупп типа G_δ, за исключением последней $\mathfrak{Z} = \{F_\alpha, \alpha \leqslant \omega_1\}$.

Доказательство. H — точка несчетного псевдохарактера из $n\mathfrak{K}(G)$, $\mathfrak{U}$ — ее окрестность. По лемме 4 $\mathfrak{U} \ni F$ — группа не типа G_δ в G. По лемме 3 строим несчетное вполне упорядоченное по убыванию множество компактных перестановочных с F подгрупп типа G_δ $\{P_\alpha, \alpha < \omega_1\}$. Причем $\forall \alpha < \omega_1$, $FP_\alpha \in \mathfrak{U}$ и $FP_\alpha \neq FP_\beta$, $\alpha \neq \beta$. Пусть $P_{\omega_1} = \bigcap\limits_{\alpha < \omega_1} P_\alpha$, P_{ω_1} — не типа G_δ. Тогда обозначим $F_\alpha = FP_\alpha$, $\alpha \leqslant \omega_1$, $\mathfrak{Z} = \{F_\alpha, \alpha \leqslant \omega_1\}$ — искомая цепь. Докажем замкнутость $\mathfrak{Z}$. Если $X \in \overline{\mathfrak{Z}}$, то X сравнима с любой подгруппой из $\mathfrak{Z}$. В самом деле, если $F_\beta \not\supset X$ и $X \not\supset F_\beta$, то окрестность точки X $D_1(G \setminus f) \cap D_2(G \setminus F_\beta) \cap \mathfrak{Z} = \varnothing$, где $f \in F_\beta \setminus X$. Далее, X не типа G_δ. Иначе в силу теоремы 2 она изолирована от всех надгрупп, а в силу вполне упорядоченности $\mathfrak{Z}$ — от всех собственных подгрупп из $\mathfrak{Z}$. Поэтому X принадлежит любой F_α, $\alpha < \omega_1$ и, значит, совпадает с F_{ω_1}. Так как $F_{\omega_1} \supset F$, то F_{ω_1} не содержит ни одной P_α, $\alpha < \omega_1$ и по лемме 2 F_{ω_1} не типа G_δ.

Теорема 3. *G — σ-компактная группа. Мощность любого открытого в $n\mathfrak{K}(G)$ σ-компактного подмножества $\mathfrak{U}$ счетна.*

Доказательство. Если $\mathfrak{U}$ — пространство счетного псевдохарактера, то по лемме 1, оно счетной мощности. Если $\mathfrak{U}$ содержит точку несчетного псевдохарактера, то по лемме 5 в $\mathfrak{U}$ найдется несчетная замкнутая убывающая цепь. По теореме 1 [5] в компактных множествах убывающая цепь должна быть конечной. Значит, $\mathfrak{U}$ нельзя представить в виде счетного объединения компактов.

Замечание. Требование об открытости $\mathfrak{U}$ существенно. Вполне упорядоченная по возрастанию цепь некомпактных подгрупп (см. следствие 2 [4]) по теореме 1 [5] будет компактным множеством.

Теорема 4. *$\mathfrak{L}(G)$ — σ-компактна тогда и только тогда, когда G — σ-компактна и множество $n\mathfrak{K}(G)$ счетно.*

Доказательство. Необходимость. По лемме 4 [8] и следствию 2 из леммы 1 [8] G содержит открытую компактную подгруппу счетного индекса и потому, σ-компактна. В силу замкнутости в $\mathfrak{L}(G)$ $n\mathfrak{K}(G)$ тоже σ-компактно. По теореме 3 $n\mathfrak{K}(G)$ счетной мощности.

Достаточность. См. теорему в работе [8].

1. *Коуровская* тетрадь / Ред. В. Д. Мазуров, Ю. И. Мерзляков, В. А. Чуркин.— 9-изд., доп.— Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1984.— 144 с.
2. *Протасов И. В.* Топологические группы с компактной решеткой замкнутых подгрупп // Сиб. мат. журн.— 1979.— **20**, № 2.— С. 378—385.
3. *Александров П. С.* Введение в теорию множеств и общую топологию.— М. : Наука, 1977.— 368 с.
4. *Комаров Ю. А., Протасов И. В.* Компактность в решетке подгрупп топологической группы // Укр. мат. журн.— 1981.— **33**, № 2.— С. 184—189.
5. *Протасов И. В.* Компакты в пространстве подгрупп топологической группы // Там же.— 1986.— **38**, № 5.— С. 600—605.
6. *Хьюит Э., Росс К.* Абстрактный гармонический анализ: В 2-х т.— М. : Наука, 1975.— Т. 1.— 654 с.
7. *Архангельский А. В., Пономарев В. И.* Основы общей топологии в задачах и упражнениях.— М. : Наука, 1974.— 424 с.
8. *Протасов И. В.* Топологические группы с σ-компактным пространством подгрупп // Укр. мат. журн.— 1985.— **37**, № 1.— С. 93—98.

Киев. ун-т

Получено 08.02.88