Математические заметки

том 49 выпуск 4 апрель 1991

О ВЕСЕ КОМПАКТНО ПОРОЖДЕННЫХ ГРУПП

А. Г. Пискунов

Условимся под топологической группой понимать локально компактную группу, а под ее подгруппой — замкнутую подгруппу. Далее, группа называется индуктивно компактной, если любая ее конечно порожденная подгруппа — компактна, и проконечной, если она нульмерна и компактна. Введем обозначения: если X подмножество группы G, то через $\overline{X}$ обозначим замыкание X, через $\langle\overline{X}\rangle$ наименьшую подгруппу G, содержащую X, e единица G, $\chi(x, X)$ характер точки x в пространстве X, т. е. наименьшая из мощностей локальных баз точки x в пространстве X, $\omega(X)$ — вес пространства X, т. е. наименьшая из мощностей баз пространства X, $\aleph_0$ счетный кардинал, $\mathfrak{c}$ кардинал множества вещественных чисел.

В связи с примерами [1] (абелева группа, в которой каждое дискретное бесконечное множество порождает неметризуемую группу) и [2, 25.14] (монотетичная неметризуемая связная абелева группа) возникла необходимость описать группы, удовлетворяющие следующему условию: для любого бесконечного компактного подмножества X группы G, $\omega(X) = \omega(\langle\overline{X}\rangle)$.

Полностью удалось описать только абелевы группы. Существенно используются следующие факты: проконечная группа обладает локальной базой e из открытых инвариантных подгрупп; любая нульмерная компактная (абелева) конечно порожденная группа метризуема; $\chi(e, G) \leqslant \aleph_0$, если группа G — метризуема [2]. Следующий результат по-видимому известен.

ЛЕММА 1. *Для σ-компактной группы G характер точки e совпадает с весом группы G.*

Доказательство. Пусть $\chi(e, G) = \tau$, $\{V\}$ локальная база e из открытых предкомпактных окрестностей. Возьмем по [2, 8.7] в каждой окрестности $V \in \{V\}$ по компактной инвариантной подгруппе P_V типа G_δ. Фактор-группа G/P_V, как σ-компактное метризуемое пространство, обладает счетной базой [3, т. 2.10, с. 49]. Пусть $\{W_{Vi}, i \geqslant 1\}$ прообразы всех открытых множеств из счетной базы группы G/P_V, относительно естественного гомоморфизма $f_V\colon G \to G/P_V$. Пусть $\mathfrak{P} = \{W_{Vi}, i \geqslant 1, V \in \{V\}\}$, а $\mathfrak{B}$ множество всех конечных пересечений окрестностей из $\mathfrak{P}$. Пусть g произвольная точка G, а $U \ni g$ ее любая окрестность.

Возьмем $V \subset g^{-1}U$, $V \in \{V\}$. Пусть $\{U_{gi}, i \geqslant 1, U_{gi} \subset G/P_V\}$ локальная база точки $f_V(g)$, $\bigcap_{i=1}^{\infty} U_{gi} = f_V(g)$. Тогда

$$gP_V = f_V^{-1}(f_V(g)) = f_V^{-1}(\bigcap_{i=1}^{\infty} U_{gi}) = \bigcap_{i=1}^{\infty} f_V^{-1}(U_{gi}).$$

Причем, по построению $\mathfrak{P}$, $\{f_V^{-1}(U_{gi}), i \geqslant 1\} \subset \mathfrak{P}$. По лемме Шуры-Буры [4] найдется конечное число множеств из $\{f_V^{-1}(U_{gi}), i \geqslant 1\}$, пересечение которых содержится в U. В силу произвольного выбора U и g, по предложению 1.9 [3, с. 20] $\mathfrak{B}$ есть база топологии на G. Далее, $\mathfrak{P}$, как счетное объединение множеств мощности τ имеет [4, т. 24, с. 86] мощность τ. Тогда и $\mathfrak{B}$ имеет мощность τ. Следовательно, $\omega(G) = \chi(e, G)$.

ЛЕММА 2. *Для каждого подмножества X веса τ группы G в локальной базе e — $\{V\}$ найдется семейство окрестностей $\mathfrak{L} \subset \{V\}$ мощности τ со свойствами:*

1) $\{xV \cap X, x \in X' \subset X, V \in \mathfrak{L}\}$ *база топологии на X мощности τ;*

2) *если $V_1, \ldots, V_k \in \mathfrak{L}$, то и $\bigcap_{i=1}^{k} V_i \in \mathfrak{L}$.*

Доказательство следует из [5, 1.1.15].

ЛЕММА 3. *Для любого компактного подмножества X веса τ нульмерной группы G можно выбрать множество $\mathfrak{S}$ компактных подгрупп со свойствами:*

1) $\{xS \cap X, x \in X' \subset X, S \in \mathfrak{S}\}$ *база топологии на X мощности τ;*

2) $\bigcap_{S \in \mathfrak{S}} S = e$.

Доказательство. Пусть $\{V\}$ локальная база e из открытых компактных подгрупп. Введем обозначение. Для любой окрестности единицы $U \subset G$ через $S(U)$ обозначим следующее подмножество подгрупп из $\{V\}$: $S(U) = \{V \in \{V\} \mid xV \supset xU \cap \cap X, x \in X\}$. Далее, пусть $\mathfrak{L}$ подмножество $\{V\}$ выбранное по 2. Множество подгрупп $\mathfrak{S} = \{S_V : S_V = \bigcap_{W \in S(V)} W, V \in \mathfrak{L}\}$ будет искомым. Из того, что $V \in S(V)$, следует, что для каждого $x \in X$, $xS_V \cap X = xV \cap X$ — открытое множество в X. Но тогда, по 2 $\{xS \cap X, x \in X' \subset X, S \in \mathfrak{S}\}$ база топологии на X мощности τ. Далее, пусть V произвольная окрестность из $\{V\}$. В силу компактности X существует $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset X$ такое, что $\bigcup_{i=1}^{n} x_i V \supset X$. По 2 в $\mathfrak{L}$ найдется такое конечное число подгрупп W_j, (X компакт) $j = \overline{1, l}$, что $\bigcup_{j=1}^{l} y_j W_j \supset X$ и каждое множество $y_j W_j \cap X$ содержится в некотором $x_j V$. Возьмем конечное пересечение $W = \bigcap_{j=1}^{l} W_j$, по 2 содержащееся в $\mathfrak{L}$, и используя тот факт, что классы смежности совпадают или не пересекаются, получаем для каждого $x \in X$ включение

$$xW \cap X \subset xW_j \cap X = y_j W_j \cap X \subset x_i V = xV$$

для некоторых $j = \overline{1, l}$ и $i = \overline{1, n}$. Тогда, по определению множества $S(W)$, $V \in S(W)$ и $V \supset S_W$. В силу произвольности выбора V имеем $\bigcap_{S \in \mathfrak{S}} S = e$.

ЛЕММА 4. *Пусть G проконечная группа. Тогда для любого бесконечного компакта $X \subset G$ характер точки e в $\overline{\langle X\rangle} = H$ совпадает с весом компакта X.*

Доказательство. Пусть вес X равен τ. По лемме 3 в H найдется множество $\mathfrak{S}$ компактных подгрупп такое, что $\{xS \cap X, x \in X' \subset X, S \subset \mathfrak{S}\}$ база топологии на X мощности τ и $\bigcap_{S \in \mathfrak{S}} S = e$. Каждая подгруппа $S \in \mathfrak{S}$ представима в виде пересечения открытых подгрупп из локальной базы e в H. По условию H обладает локальной базой из инвариантных в H подгрупп. Значит, можно считать, что каждая $S \in \mathfrak{S}$ инвариантна в H. Компакт X можно покрыть конечным числом открытых в X базисных множеств, $X = \bigcup_{j=1}^{n} (x_j S \cap X)$. Далее получаем

$$\bigcup_{j=1}^{n} (x_j S \cap X) \subset \bigcup_{j=1}^{n} (x_j S \cap H) =$$
$$= \bigcup_{j=1}^{n} (x_j S \cap x_j H) = \bigcup_{j=1}^{n} x_j (S \cap H),$$

где $x_j \in X, j = \overline{1, n}$. Убедимся, что $A = \overline{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle} (S \cap H) = \overline{\langle x_1, \ldots, x_n, S \cap H\rangle} = H$; $A \subset H$ вытекает из $x_1, \ldots, x_n \in H$; $H \subset A$ вытекает из $X \subset \bigcup_{j=1}^{n} x_j (S \cap H) \subset A$. Вследствие гомеоморфизма 2, 5.33

$$H/S \cap H \simeq \overline{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle} (S \cap H)/S \cap H \simeq$$
$$\simeq \overline{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle}/\overline{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle} \cap S \cap H = F$$

и того, что конечно порожденная F метризуема, получаем, что $S \cap H$ типа G_δ в H. Тогда для каждой подгруппы $S \in \mathfrak{S}$ возьмем $\{U_i (S), i \geqslant 1\}$ счетное число открытых в H множеств таких, что $\bigcap_{i=1}^{\infty} U_i (S) = S \cap H$. Получаем $\bigcap_S \bigcap_i U_i (S) = \bigcap_S (S \cap H) = e$. По 4, т. 24, с. 86 множество $\{U_i (S), i \geqslant 1, S \in \mathfrak{S}\}$ как счетное объединение множеств мощности не более чем τ обладает мощностью не более τ. Вследствие локальной компактности H, характер e в H не превосходит τ. Так как вес $H \supset X$ не меньше веса X, а характер e в H по лемме 1 совпадает с весом H, то $\chi (e, H) = \tau$.

ЛЕММА 5. *Пусть G нульмерная индуктивно компактная группа. Тогда для любого бесконечного компакта $X \subset G$ вес подгруппы $\overline{\langle X\rangle}$ равен весу компакта X.*

Доказательство. В индуктивно компактной группе G подгруппа $\overline{\langle X\rangle}$ будет компактной. Поэтому по леммам 1 и 4 $\omega (X) = \omega (\overline{\langle X\rangle})$.

Следствие. *Пусть G проконечная (нульмерная компактно порожденная абелева) группа. Тогда в любой окрестности e — U найдется компактная инвариантная подгруппа P такая, что G представима в виде произведения $L \cdot P = G$ для некоторой метризуемой подгруппы L.*

Доказательство. По [2, 5.14] G σ-компактна. По [2, 8.7] в U найдется такая компактная инвариантная подгруппа P, что G/P метризуема. Пусть X компакт порождающий G/P. По [2, 3.12] и следствию 4 из теоремы 16 [6, с. 146] в G существует компакт Y гомеоморфный X и $f(Y) = X$, где f: $G \to G/P$. Поэтому Y метризуем. Тогда по лемме 5 (и [2, 9.14]) $L = \overline{\langle Y \rangle}$ метризуемая группа, и из того, что $f(L) = G/P$ следует $LP = G$.

ТЕОРЕМА. *Пусть G абелева группа. Для произвольного бесконечного компакта $X \subset G$ вес $\overline{\langle X \rangle}$ совпадает с весом X тогда и только тогда, когда компонента связности e — G_0 метризуема.*

Доказательство. Необходимость. Пусть G_0 не метризуема. По [2, 9.14] $G_0 \simeq \mathbf{R}^n \times E$, где $n \geqslant 0$ и $E \neq \langle e \rangle$ связная компактная группа. Используя лемму 1, получаем, что $\omega(G_0) = \omega(E) > \aleph_0$. Если $\omega(E) \leqslant \mathfrak{c}$, то по [2, 25.14] E монотетичная группа, $E = \overline{\langle x \rangle}$, $x \in E$. Если $\omega(E) > \mathfrak{c}$, то выберем из локальной базы e группы E подмножество окрестностей мощности континуум, $\{V_i,\ i \in I,\ |I| = \mathfrak{c}\}$. Используя 2, 8.7, можно доказать, что $\bigcap_{i \in I} V_i$ содержит компактную подгруппу $P >$ типа $G_{\mathfrak{c}}$. В силу компактности точка e имеет в E псевдохарактер, равный $\omega(E)$, и значит, $\langle e \rangle \neq P$. Пусть f: $E \to E/P \simeq E^*$. По выбору P, псевдохарактер e в E^* равен $\mathfrak{c}$, а значит, $\chi(e, E^*) = \omega(E^*) = \mathfrak{c}$. Тогда по [2, 25.14] E^* монотетичная группа, $E^* = \overline{\langle x^* \rangle}$. Пусть $x \in f^{-1}(x^*)$ — произвольный одноточечный прообраз x^*. Тогда $f(\overline{\langle x \rangle}) = E^*$, и по [5, 3.1.22] $\omega(\overline{\langle x \rangle}) \geqslant \mathfrak{c}$. Далее возьмем любой метризуемый бесконечный компакт $X \subset G$. Тогда $X \cup \{x\} = Q$ тоже метризуемый компакт. Но группа $\overline{\langle Q \rangle}$ содержит неметризуемую $\overline{\langle x \rangle}$ и поэтому сама не метризуема. Значит, $\omega(Q) < \omega(\overline{\langle Q \rangle})$.

Достаточность. Предположим, что G_0 метризуема. Пусть f: $G \to G/G_0 \simeq G^*$, $\omega(X) = \tau$. По [5, 3.1.22] вес $X^* = f(X)$, как непрерывного компактного образа X, не превосходит τ.

Пусть X^* бесконечный компакт. По лемме 4 (G^* нульмерная группа) характер e в σ-компактной группе $\overline{\langle X^* \rangle}$ равен $\omega(X^*) = \tau^*$. В силу непрерывности отображения f подгруппа G_0 типа G_{τ^*} в $S = f^{-1}(\overline{\langle X^* \rangle})$. Так как G_0 метризуема, то характер e в S тоже равен τ^*. Из σ-компактности связной G_0 и компактно порожденной $\overline{\langle X^* \rangle} \simeq S/G_0$ по лемме 8 из [7] следует σ-компактность группы S. Тогда по лемме 1, вес S равен τ^*. Далее, из включений $S \supset \overline{\langle X \rangle} \supset X$ и рассмотренного выше получаем цепочку неравенств $\tau \geqslant \tau^* = \omega(S) \geqslant \omega(\overline{\langle X \rangle}) \geqslant \omega(X) = \tau$.

Пусть X^* — конечное множество. Тогда группа $\overline{\langle X^* \rangle}$ метризуема. По следствию 10 [6, с. 154] метризуемой будет и группа $S = f^{-1}(\overline{\langle X^* \rangle})$. Получили $\aleph_0 = \omega(S) \geqslant \omega(\overline{\langle X \rangle}) \geqslant \omega(X) = \aleph_0$. Значит, в обоих случаях $\omega(\overline{\langle X \rangle}) = \omega(X)$.

Киевский государственный университет

Поступило 05.10.88

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Миронец А. А., Полецкий В. М. Пространство нормальных подгрупп нильпотентной группы // ДАН УССР. 1986. № 5. С. 19—21.
[2] Хьюит Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ. Т. 1. М.: Наука, 1975.
[3] Александрян Р. А., Мирзаханян Э. А. Общая топология. М.: Высш. шк., 1979.
[4] Александров П. С. Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Наука, 1977.
[5] Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986.
[6] Чобан М. М. Редукционные теоремы о существовании непрерывных сечений. Сечения над подмножествами фактор-пространств топологических групп // Математические исследования. 1973. Т. 8, № 4. С. 111—156.
[7] Полецкий В. М. Слойно-компактные нильпотентные группы // Сиб. мат. журн. 1975. Т. 16, № 4. С. 801—809.