

## Рекурентний метод обробки інформації

Рекурентний метод обробки інформації дозволяє отримати оцінку параметра після кожного досліду. Для пояснення рекурентного (послідовного) методу отримання оцінок вважаємо, що зроблено  $m$  вимірювань параметра  $x$ , тобто

$$z_i = x + v_{z_i}; \quad i = \overline{1, m}$$

де  $x$  – вимірюваний параметр;  $v_{z_i}$  – похибка  $i$ -го спостереження.

За результат оцінки вимірюваного параметра  $x_m$  при проведенні  $m$  спостережень візьемо:

$$\hat{x}_m = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m z_i,$$

Тоді на черговому ( $i + 1$ )-му кроці вимірювань значення оцінки  $\hat{x}_{m+1}$ , має вигляд:

$$\hat{x}_{m+1} = \frac{\left( \sum_{i=1}^m z_i \right) + z_{m+1}}{m+1} = \frac{m}{m+1} \left( \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m z_i \right) + \frac{1}{m+1} z_{m+1} \quad (4.18)$$

або

$$\hat{x}_{m+1} = \frac{m}{m+1} \hat{x}_m + \frac{1}{m+1} z_{m+1}.$$

де  $z_{m+1}$  – останнє ( $m + 1$ )-ше спостереження.

Додамо та віднімемо з правої частини виразу (4.18) значення  $\hat{x}_m$ , у наслідок отримаємо

$$\hat{x}_{m+1} = \hat{x}_m + \left( \frac{m}{m+1} - 1 \right) \hat{x}_m + \frac{1}{m+1} z_{m+1} = \hat{x}_m - \frac{1}{m+1} \hat{x}_m + \frac{1}{m+1} z_{m+1}.$$

Остаточо можна записати:

$$\hat{x}_{m+1} = \hat{x}_m + \frac{1}{m+1} (z_{m+1} - \hat{x}_m)$$

або, позначивши  $\frac{1}{m+1} = k$ ,

$$\hat{x}_{m+1} = \hat{x}_m + k(z_{m+1} - \hat{x}_m). \quad (4.19)$$

Отже, оцінку  $\hat{x}_{m+1}$  можна отримати з попередньої оцінки  $\hat{x}_m$  шляхом складання її з різницею між новим спостереженням  $z_{m+1}$  та попередньою оцінкою, помноженою на коефіцієнт ваги  $k$ . У цьому випадку зникає необхідність зберігати  $m$  спостережень, отриманих на попередніх кроках вимірювання, оскільки вся попередня інформація об'єднана в апіорній оцінці  $\hat{x}_m$ .

Математична модель рекурентного методу обробки інформації показана на рис. 4.9.

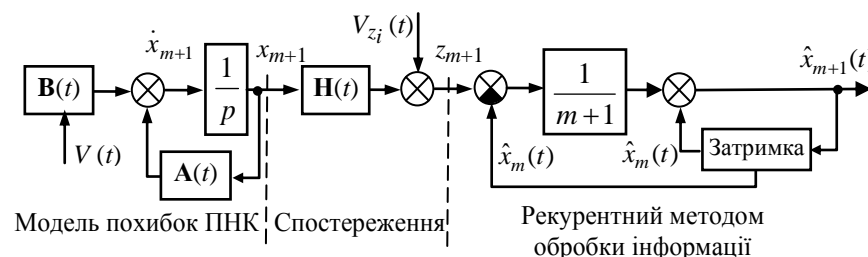


Рис.4.9

Рекурентний алгоритм (4.19) зв'язує поточне значення оцінки  $\hat{x}_{m+1}$  з її попереднім значенням  $\hat{x}_m$

Різниця  $(z_{m+1} - \hat{x}_m)$  стає показником цінності інформації, яку отримують при проведенні  $(z_{m+1})$ -го спостереження. Дійсно, якщо ця різниця близька до нуля, то зафіксоване спостереження  $z_{m+1}$  не несе будь-якої нової інформації у порівнянні з апіорною, і в цьому випадку  $\hat{x}_{m+1} \cong \hat{x}_m$ . Навпаки, при великій різниці  $(z_{m+1} - \hat{x}_m)$  з урахуванням вагового коефіцієнта здійснюється суттєве уточнення оцінки  $\hat{x}_m$ , отриманої на попередньому кроці розрахунків.

Але коефіцієнт

$$k = \frac{1}{m+1}$$

отримано без використання критерію оптимальності, тому оцінка  $\hat{x}_{m+1}$  також не є оптимальною, що знижує цінність даного методу обробки інформації.

### Алгоритм неперервного оптимального фільтра Калмана

Алгоритм неперервного оптимального фільтра Калмана (ОФК) об'єднує розв'язання двох задач: спостереження та фільтрації. Принцип побудови ОФК розглянемо для випадку лінійної системи, описаної системою рівнянь (4.10). Ставиться задача знайти такі оцінки  $\hat{\mathbf{X}}$ , щоб помилки оцінювання

$$\mathbf{\Lambda}(t) = \mathbf{X}(t) - \hat{\mathbf{X}}(t)$$

були мінімальними. Іншими словами, необхідно забезпечити мінімум суми діагональних елементів матриці

$$\mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} = M \left[ \mathbf{\Lambda}(t) \mathbf{\Lambda}^T(t) \right]$$

У коваріаційній матриці  $\mathbf{P}(t)$  члени  $p_{ii} = D_i = \sigma^2_i$  характеризують дисперсії помилок оцінювання співпадаючих координат  $x_i$ , а члени  $p_{ij}$  – їхню взаємну кореляцію.

Відомо, що для динамічної системи (4.10) оптимальним фільтром, що забезпечує мінімум сліду матриці  $\mathbf{P}$ , стає алгоритм, який складається з трьох блоків:

1) основного блоку

$$\dot{\hat{\mathbf{X}}}(t) = \mathbf{A}(t)\hat{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{K}_\phi(t) \left[ \mathbf{Z}(t) - \mathbf{H}(t)\hat{\mathbf{X}}(t) \right]; \quad (4.20)$$

2) блоку обчислення коефіцієнтів корекції

$$\mathbf{K}_\phi(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{H}^T(t)\mathbf{R}_Z^{-1}(t) \quad (4.21)$$

3) блоку розв'язання рівняння коваріацій

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{A}^T(t) - \mathbf{P}(t)\mathbf{H}^T(t)\mathbf{R}_Z^{-1}(t)\mathbf{H}(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{V}(t)\mathbf{R}_X\mathbf{V}^T(t) \quad (4.22)$$

Цей алгоритм забезпечує оцінювання всіх координат вектора  $\mathbf{X}$  при виконанні умов спостережливості динамічної системи. Його особливість у виборі коефіцієнтів матриці  $\mathbf{K}_\phi$ . Вихідні значення оцінок  $\hat{\mathbf{X}}(0)$  визначаються за попередньою інформацією про координати вектора  $\mathbf{X}$ . Коваріаційну матрицю поточних помилок оцінювання

$\mathbf{P}(t)$  необхідно обчислювати безперервно в процесі оцінювання, або попередньо, якщо це можливо.

Зміст рівняння коваріацій, за яким розраховується матриця  $\mathbf{P}(t)$ , пояснюється таким чином: якщо модель динамічної системи ідеально точна, то реальні помилки оцінювання для фільтра, побудованого за вказаним рівнянням, будуть співпадати з коваріаціями  $\mathbf{P}(t)$  і при цьому вони будуть мінімальні. Отже, оптимальність фільтра буде досягнута тільки у випадку точного опису структури моделі системи та правильно обраних параметрів:  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{R}_X$ ,  $\mathbf{R}_Z$

Ось чому при синтезі систем оцінювання особливу увагу приділяють процесу складання математичних моделей вимірників та досліджуваної системи.

Пояснимо фізичний зміст деяких елементів ОФК.

У рівнянні коваріацій (4.22) член  $\mathbf{A}(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{A}^T(t)$  характеризує зміну помилок у результаті власного руху системи. Для стійкої системи елементи матриці  $\mathbf{A}(t)$  ( $a_{ij} < 0$ ), що визначає зменшення швидкості зміни дисперсій помилок оцінювання співпадаючих координат ( $\dot{p}_{ii} < 0$ ) і призводить до зменшення помилок, оскільки в стійкій системі й  $\mathbf{X}(t) \rightarrow 0$  і  $\hat{\mathbf{X}}(t) \rightarrow 0$  (початкова невизначеність із часом зменшується).

Множник  $\mathbf{P}(t)\mathbf{H}^T(t)\mathbf{R}_Z^{-1}(t)\mathbf{H}(t)\mathbf{P}(t)$  характеризує ефект корекції оцінок від вимірників і завжди визначає  $\dot{p}_{ii} < 0$ , тобто вказує на зменшення помилок оцінювання.

Множник  $\mathbf{V}(t)\mathbf{R}_X\mathbf{V}^T(t)$  характеризує величину невизначеності (випадковості) контрольованого процесу, завжди визначає, що  $\dot{p}_{ii} > 0$ , а значить помилки оцінювання не можуть, бути зведені до нуля.

Зауважимо що, оскільки рівняння коваріацій (4.22) автономне і не зв'язане з реальними вимірами  $\mathbf{Z}(t)$ , то його розв'язання може бути виконане окремо від основного алгоритму фільтра й навіть заздалегідь. Перед розв'язанням рівняння коваріацій необхідно оцінити та задати початкові значення  $\mathbf{P}(0)$  на основі аналізу точності інформації про координати вектора  $\mathbf{X}(t)$  і початкові значення  $\hat{\mathbf{X}}(0)$ , яка існує до вмикання фільтра. На практиці, зазвичай, обмежуються

завданням головної діагоналі  $p_{ii} < 0$ , тобто вихідних дисперсій помилок оцінювання, вважаючи, що  $p_{ij} = 0$ , ( $i \neq j$ ).

З часом процес розв'язання рівняння коваріацій (див. рис.4.10) приходиться до усталеного значення  $\mathbf{P}_{уст}$ , при якому виконується рівність

$$\mathbf{P}_{уст} \mathbf{H}^T \mathbf{R}_Z^{-1} \mathbf{H} \mathbf{P}_{уст} = \mathbf{A} \mathbf{P}_{уст} + \mathbf{P}_{уст} \mathbf{A}^T + \mathbf{B} \mathbf{R}_X \mathbf{B}^T.$$

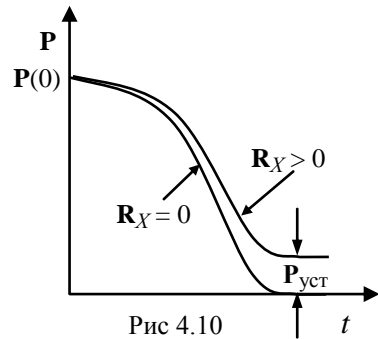


Рис. 4.10

Задача оцінки параметрів полягає в знаходженні компромісу при фільтрації завади, спектр якої визначений  $\mathbf{R}_Z$  і корисного сигналу, спектр якого визначений як  $\mathbf{R}_X$ , з урахуванням динамічних характеристик процесу, тобто матриці коефіцієнтів системи  $\mathbf{A}$ .

Зауважимо, що для стійкої та детермінованої системи, тобто при відсутності випадкових збурень

( $\mathbf{R}_X = 0$ ), завжди  $\dot{p}_{ii} < 0$  та  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}_{уст} = 0$ .

Таким чином, із часом помилка оцінювання прямує до нуля. При цьому шуми вимірників не впливатимуть на помилку оцінювання, оскільки самі вимірники вимикаються від схеми фільтра при  $\mathbf{P} = 0$  і, як наслідок, відповідно до рівняння коефіцієнтів корекції  $\mathbf{K}_\Phi = 0$ . При синтезі фільтрів цей ефект необхідно враховувати і до збурень  $\mathbf{V}_X$  відносити не тільки реальні фізичні збурення, наприклад, вітрові збурення, що діють на ЛА, але й можливі неточності завдання моделей процесу і вимірювання управліннь.

У рівнянні коефіцієнтів корекції (4.21), матриця  $\mathbf{K}_\Phi$  має вигляд:

$$\mathbf{K}_\Phi = \begin{bmatrix} k_{\Phi 11} & k_{\Phi 12} & \dots & k_{\Phi 1m} \\ k_{\Phi 21} & k_{\Phi 22} & \dots & k_{\Phi 2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{\Phi n1} & k_{\Phi n2} & \dots & k_{\Phi nm} \end{bmatrix}.$$

Елементи цієї матриці  $k_{\Phi ij}$  характеризують зв'язок сигналу вимірника  $z_j$  з оцінкою координати  $\hat{x}_i$ . Матриця спостережень  $\mathbf{H}^T$  у рівнянні коефіцієнтів корекції визначає такий факт: якщо координата  $x_i$  не бере участь у формуванні сигналу  $z_j$ , то коефіцієнт  $k_{\Phi ij} = 0$ .

Між коефіцієнтами  $k_{\Phi ij}$  і  $p_{ij}$  відповідно до рівняння корекції існує пряма залежність, це свідчить про те, що підсилення корекції оцінок відбувається сильніше в тих координатах, у котрих більше передбачувані помилки оцінювання, а обернена залежність коефіцієнтів  $k_{\Phi ij}$  і  $R_{z_{ij}}$  (у рівнянні корекції  $\mathbf{K}_\Phi = f(\mathbf{R}_Z^{-1})$ ) визначає більш значні сигнали корекції від більш точних вимірників.

Як висновок, зобразимо структурну схему алгоритму ОФК, що відповідає наведеним вище рівнянням (рис. 4.11).

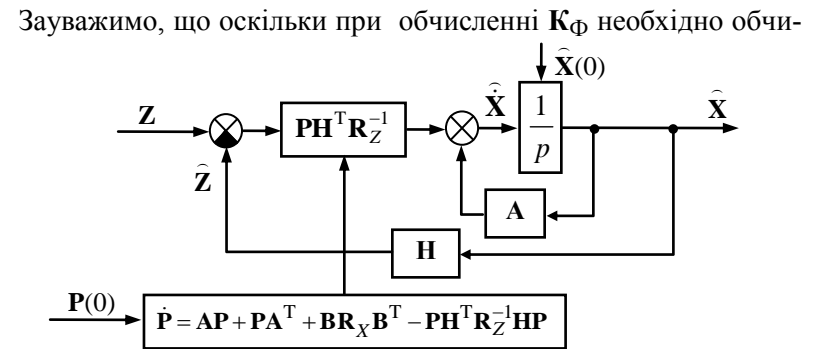


Рис.4.11.

слювати обернену матрицю  $\mathbf{R}_Z^{-1}$ , то ні для одного з вимірників не можна задати  $R_{z_{ij}} = 0$ , а якщо такий вимірник існує, то необхідно штучно задати малий розмір  $R_{z_{ij}}$ .

**Приклад 4.** Застосування ОФК розглянемо на прикладі спільної обробки інформації про поздовжню складову шляхової швидкості ЛА  $V_x$ , яка вимірюється інерціальною системою і доплеровським вимірником типу ДИСС. Необхідно побудувати структурну схему ОФК і обрати коефіцієнти ОФК, які забезпечують отримання оптимальної оцінки  $V_x$ .

Для спрощення задачі припустимо, що контрольований процес описується рівнянням  $\dot{V} = \xi_V$ , тобто матриця коефіцієнтів системи  $\mathbf{A} = 0$ . За збурення  $\xi_V$  прийmemo білий шум зі спектральною щільністю  $R_V$ . Результати вимірювань надамо у вигляді:

$$z_1 = V_X + \xi_1 \text{ – вимір за допомогою ІНС,}$$

$$z_2 = V_X + \xi_2 \text{ – вимір за допомогою ДИСС,}$$

де  $\xi_1, \xi_2$  – помилки вимірювання зі спектральними щільностями  $R_{z_1}$  і  $R_{z_2}$ , відповідно.

Визначимо матрицю коефіцієнтів  $\mathbf{K}_\Phi$  для усталеного режиму оцінювання, тобто при  $\mathbf{P} = 0$ . З урахуванням зроблених зауважень рівняння ОФК будуть мати вигляд:

$$\hat{\dot{\mathbf{X}}} = \mathbf{K}_\Phi (\mathbf{Z} - \mathbf{H} \hat{\mathbf{X}});$$

$$\mathbf{K}_\Phi = \mathbf{P} \mathbf{H}^T \mathbf{R}_Z^{-1};$$

$$\mathbf{P} \mathbf{H}^T \mathbf{R}_Z^{-1} \mathbf{H} \mathbf{P} = \mathbf{R}_V;$$

$$\text{де } \mathbf{K}_\Phi = \begin{bmatrix} k_{\phi_1} & k_{\phi_2} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R}_Z^{-1} = \begin{bmatrix} R_{z_1}^{-1} & 0 \\ 0 & R_{z_2}^{-1} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}.$$

Коваріаційне рівняння в цьому випадку має вигляд:

$$\mathbf{P} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{z_1}^{-1} & 0 \\ 0 & R_{z_2}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{P} = \mathbf{R}_V.$$

У скалярному вигляді одержимо:

$$P_{11}^2 \frac{R_{z_1} + R_{z_2}}{R_{z_1} R_{z_2}} = R_V.$$

Позначивши  $(R_{z_1} R_{z_2})(R_{z_1} + R_{z_2})^{-1} = R_{Z_\Sigma}$ , знайдемо дисперсію помилок оцінювання як

$$P_{11} = R_{Z_\Sigma} \sqrt{R_V (R_{Z_\Sigma})^{-1}} = C R_{Z_\Sigma},$$

$$\text{де } C = \sqrt{R_V (R_{Z_\Sigma})^{-1}}.$$

Запишемо вираз для коефіцієнтів корекції

$$\mathbf{K}_\Phi = \begin{bmatrix} k_{\phi_1} & k_{\phi_2} \end{bmatrix} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{z_1}^{-1} & 0 \\ 0 & R_{z_2}^{-1} \end{bmatrix};$$

або в скалярному вигляді

$$k_{\phi_1} = \frac{P_{11}}{R_{z_1}} = \frac{C R_{Z_\Sigma}}{R_{z_1}} = k_1 C; \quad k_{\phi_2} = \frac{P_{11}}{R_{z_2}} = \frac{C R_{Z_\Sigma}}{R_{z_2}} = k_2 C,$$

$$\text{де } k_1 = \frac{R_{Z_\Sigma}}{R_{z_1}}, \quad k_2 = \frac{R_{Z_\Sigma}}{R_{z_2}}$$

На рис. 4.12 показана структурна схема отримання оцінки для даного прикладу. Коефіцієнти  $k_1$  і  $k_2$  відповідають оптимальним значенням, які отримують на етапі попереднього комплексування вимірників. Оскільки сума коефіцієнтів  $k_1 + k_2 = 1$ , то схема фільтра рис. 4.12 може бути перетворена до вигляду рис.4.13.

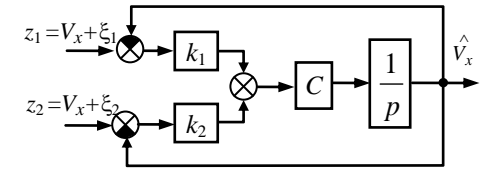


Рис.4.12.

Отже, для даної задачі показана можливість попереднього комплексування вимірників без порушення оптимальності фільтра. Однак для одержання оптимальної оцінки недостатньо просто використовувати вихід комплексного вимірника  $z_\Sigma$ , а необхідний додатковий фільтр у вигляді аперіодичної ланки зі сталою часу

$$T = \frac{1}{C} = \sqrt{\frac{S_{z\Sigma}}{S_{z2}}}$$

Оптимальний фільтр, враховуючи характеристики контрольованого процесу, мінімізує помилку оцінювання.

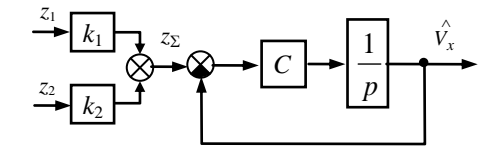


Рис.4.13.

### Контрольні питання.

1. Викласти суть метода обробки інформації в ПНК способом взаємної компенсації. Коли можна використовувати метод обробки інформації в ПНК способом взаємної компенсації?
2. Викласти суть метода обробки інформації в НК способом фільтрації. Коли можна використовувати метод обробки інформації в ПНК способом взаємної фільтрації?
3. Викласти алгоритм оцінки параметра по методу найменших квадратів. Коли можна використовувати метод найменших квадратів при обробки інформації в ПНК?
4. Викласти алгоритм оцінки параметра по методу максимуму правдоподібності. Коли можна використовувати метод максимуму правдоподібності при обробки інформації в ПНК?
5. Викласти алгоритм рекурентного метода обробки інформації.
6. В чем состоит суть алгоритму оптимального фільтра Калмана. Яки задачі розв'язує оптимальний фільтр Калмана?
7. Яки блоки вирішуються при обробки інформації за допомогою оптимального фільтра Калмана?
8. Как влияет на точность оценки пилотажно-навигационной информации ошибки в определении матрицы коэффициентов?