

П.О.Приставка

Національний авіаційний університет

ЛІНІЙНІ КОМБІНАЦІЇ B -СПЛАЙНІВ, БЛИЗЬКІ ДО ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ У СЕРЕДНЬОМУ, В ЗАДАЧІ МОДЕЛЮВАННЯ АНАЛОГОВИХ СИГНАЛІВ

Для побудови моделей аналогових сигналів зі скінченною енергією пропонується використовувати лінійні комбінації B -сплайнів, близькі до інтерполяційних у середньому другого порядку та вище.

Постановка проблеми. Останні десятиріччя серед методів обробки цифрових сигналів актуальність набули такі, що забезпечують адекватне опрацювання даних у режимі реального часу. Поясненням даного є потреба в обробці постійно зростаючих обсягів інформації, що передається, зберігається, обробляється, тощо. Деякі з таких методів є обчислювальним аспектом відомих підходів до апроксимації, наприклад, швидке перетворення Фур'є, для інших було спеціально розроблено теоретичне обґрунтування, наприклад, вейвлет-методи.

В якості критерію адекватності роботи методу вимагають, щоб результат обробки відповідав фізичній природі аналогового сигналу, представленням якого є цифровий сигнал. Така вимога значно простіше може бути виконана, якщо метод ґрунтується на моделі, що є апроксимацією аналогового сигналу, причому моделі, що при побудові потребує мінімальної кількості обчислювальних операцій та за своїми властивостями є близькою до властивостей сигналу. Наприклад, лінійні комбінації B -сплайнів [1–4] є обчислювальним засобом обробки послідовностей відліків функцій, якому притаманні ряд цінних властивостей: обчислювальна простота, можливість враховувати локальні «особливості» сигналу, згладжувальні властивості та інш. Проте, поліноміальний сплайн, що є лінійною комбінацією B -сплайнів, як модель аналогового сигналу не набув гідного поширення у вітчизняних наукових роботах [5–7], хоча й має висвітлення в багатьох працях за кордоном. А локальні поліноміальні сплайни, близькі до інтерполяційних у середньому на основі B -сплайнів як модель сигналу взагалі не використовувались, хоча й вводились А.О.Лигуном як апарат обробки даних, заданих з вадою.

Тому актуальним може бути узагальнення відомих понять та положень про сплайн-апроксимацію на випадок побудови неперервної моделі сигналу з кінцевою енергією саме останніми із зазначених вище сплайнів.

Аналіз публікацій та постановка задачі. Функція $s(t)$, задана та неперервна на відрізку $[a; b]$, називається поліноміальним сплайном порядку r ($r \geq 1$) з вузлами t_i , $i = \overline{0, N}$, $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = b$, якщо на кожному з проміжків $[a; t_1]$, $[t_i; t_{i+1}]$, $i = \overline{1, N-2}$, $[t_{N-1}; b]$, $s(t)$ є алгебраїчний багаточлен ступеня, що не перевищує r , а в кожній із точок t_i , $i = \overline{0, N}$ деяка похідна $s^{(v)}(t)$, ($1 \leq v \leq r$) може мати розрив [1]. Головними характеристиками сплайну є найбільший порядок r багаточленів із яких він складається, кількість і розташування вузлів та гладкість склеювання в кожному вузлі.

Якщо задано фіксовану систему точок $\Delta[a; b]$: $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = b$, або, іншими словами, задано розбиття відрізка $[a; b]$, то множину $S_r^k(\Delta[a; b])$ називають множиною сплайнів порядку r дефекту k за розбиттям $\Delta[a; b]$. Множину $S_r^1(\Delta[a; b])$ (або просто $S_r(\Delta[a; b])$) називають множиною сплайнів мінімального дефекту.

Якщо довільним чином доповнити розбиття $\Delta[a; b]$ точками $t_{-r} < t_{-r+1} < \dots < t_{-1} < a$; $b < t_{N+1} < \dots < t_{N+r}$, у результаті чого одержують систему точок

$$t_{-r} < t_{-r+1} < \dots < t_{-1} < \overline{t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N} < t_{N+1} < \dots < t_{N+r}, \quad (1)$$

то тоді для кожного $i = \overline{-r, N-1}$ існує сплайн $B_{r,i}(t)$ порядку r дефекту 1 за розбиттям $t_i < t_{i+1} < \dots < t_{i+r+1}$, який визначається рівностями

$$\int_{t_i}^{t_{i+r+1}} B_{r,i}(t) dt = 1, \quad B_{r,i}(t) = 0, \quad t < t_i; \quad t > t_{i+r+1},$$

або

$$B_{r,i}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+r} - t_i} B_{r-1,i}(t) + \frac{t_{i+r+1} - t}{t_{i+r+1} - t_{i+1}} B_{r-1,i+1}(t),$$

$$\sum_{i=-r}^{N-1} B_{r,i}(t) = 1,$$

де
$$B_{0,i}(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [t_i; t_{i+1}], \\ 1, & t \in [t_i; t_{i+1}]. \end{cases}$$

Сплайн $B_{r,i}(t) \in C^{r-1}(-\infty; \infty)$, визначений на всій дійсній вісі називається B -сплайном порядку r на сітці $t_i < t_{i+1} < \dots < t_{i+r+1}$. При цьому відрізок $[t_i; t_{i+r+1}]$, на якому $B_{r,i}(t) > 0$, називають носієм B -сплайну.

Відомо [1; 2], що система із $N+r$ B -сплайнів $B_{r,i}(t)$, $i = \overline{-r, N-1}$ порядку r за розбиттям (1) з носієм $[t_i; t_{i+r+1}]$ є базисом в $S_r(\Delta[a; b])$. Як наслідок, можна зазначити, що будь-який сплайн $s(t) \in S_r(\Delta[a; b])$ єдиним чином можна представити у вигляді

$$s(t) = \sum_{i=-r}^{N-i} c_i B_{r,i}(t), \quad t \in [a; b], \quad (2)$$

де c_i , $i = \overline{-r, N-1}$ – деякі дійсні числа, такі, що

$$s(t) = \sum_{i=-r}^{N-i} c_i B_{r,i}(t) = 0,$$

тоді і тільки тоді, коли $c_{-r} = c_{-r+1} = \dots = c_{N-1} = 0$.

Нехай при деякому $h > 0$ задано рівномірне розбиття Δ_h дійсної вісі R_1 точками ih , $i \in Z$. Множину сплайнів порядку r мінімального дефекту, визначену на розбитті Δ_h позначають $S_r(\Delta_h)$. Тоді, якщо

$$B_{0,h}(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [-h/2; h/2], \\ 1, & t \in [-h/2; h/2], \end{cases} \quad (3)$$

то B -сплайн $B_{r,h}(t) \in S_r(\Delta_h)$ порядку r ($r \geq 1$) визначається рекурентно із співвідношення

$$B_{r,h}(t) = \frac{1}{h} \int_{t-h/2}^{t+h/2} B_{r-1,h}(\tau) d\tau. \quad (4)$$

Стосовно виразу (4) можна зазначити наступне. За визначенням $B_{0,h}(t)$ є характеристичною функцією інтервалу $[-h/2; h/2]$. Зауважимо, що питання «закритості» інтервалу не є принциповим для подальшого викладення, наприклад, в роботі [8] B -сплайн нульового порядку (з точністю до зсуву аргументу) вводиться так:

$$B_{0,h}(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [-h/2; h/2], \\ 1/2, & |t| = h/2, \\ 1, & t \in (-h/2; h/2). \end{cases}$$

В роботі [9] $B_{0,h}(t)$ подано, як характеристична функція напіввідкритого інтервалу $[-h/2; h/2)$ і для $r \geq 1$ відповідний сплайн $B_{r,h}(t)$ визначається рекурентно інтегралом згортки:

$$B_{r,h}(t) = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} B_{r-1,h}(t-\tau) B_{0,h}(\tau) d\tau.$$

На загал можна записувати операцію згортки так:

$$B_{r,h}(t) = (B_{r-1,h} * B_{0,h})(t) = \underbrace{(B_{0,h} * B_{0,h} * \dots * B_{0,h})}_{(r+1) \text{ разів}}(t),$$

звідки вираз (4) слідує із фінітних властивостей B -сплайн-функції.

На розбитті Δ_h B -сплайн порядку r має в якості носія проміжок $d_r = [-(r+1)h/2; (r+1)h/2]$, отже

$$\int_{-\infty}^{\infty} B_{r,h}(t) dt = \int_{d_r} B_{r,h}(t) dt = \int_{-(r+1)h/2}^{(r+1)h/2} B_{r,h}(t) dt = h.$$

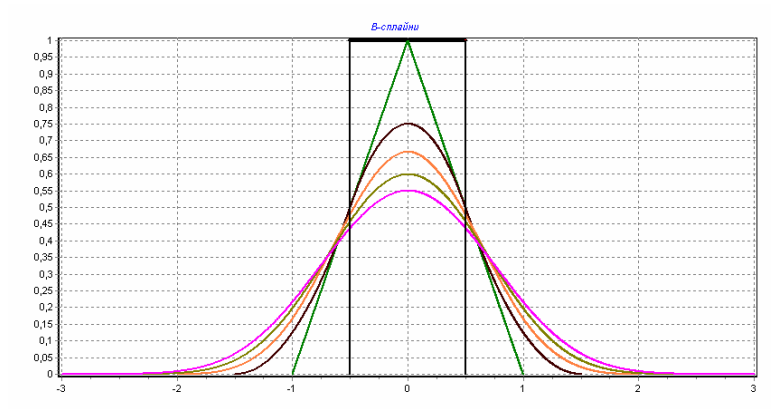


Рис.1. B -сплайни $r \geq 0$, $h = 1$.

Із визначення B -сплайну на Δ_h та виразів (3), (4) не важко отримати

аналітичні представлення $B_{r,h}(t)$ при різних значеннях r . Наприклад, при $r = 2$ B -сплайн другого порядку визначається так [1]:

$$B_{2,h}(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [-3h/2; 3h/2], \\ (3 + 2t/h)^2/8, & t \in [-3h/2; -h/2], \\ 3/4 - (2t/h)^2/4, & t \in [-h/2; h/2], \\ (3 - 2t/h)^2/8, & t \in [h/2; 3h/2]. \end{cases} \quad (5)$$

Зрозуміло, що сплайни $B_{r,h}(t)$, $r \geq 1$ є симетричними функціями відносно свого носія (рис.1).

Так само, як і у випадку нерівномірного розбиття, щодо B -сплайнів $B_{r,h}(t)$ можна стверджувати: якщо $S_r(\Delta_h)$ – множина всіх сплайнів мінімального дефекту за розбиттям Δ_h і $B_{r,h}(t) \in S_r(\Delta_h)$, $r \geq 1$, то лінійна комбінація $S_r(t)$ сплайнів $B_{r,h}(t)$ також буде належати множині $S_r(\Delta_h)$, тому має місце вираз, аналогічний (1.2)

$$S_r(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} c_i B_{r,h}(t) \in S_r(\Delta_h). \quad (6)$$

Отже, лінійна комбінація $S_r(t)$, $r \geq 1$ – є сплайн мінімального дефекту. Найчастіше подібні сплайни називають локальними поліноміальними сплайнами на основі B -сплайнів r -го порядку.

Розглянемо аналоговий сигнал $p(t) \in L_2(\mathbb{R})$ з кінцевою енергією, що визначається його нормою

$$\|p(t)\|_{L_2} = \langle p(t), p(t) \rangle^{1/2},$$

заданий дискретно (цифровий сигнал) відліками на рівномірному розбитті $\Delta_h : ih, i \in \mathbb{Z} : \{p_i\} \in l_2(\mathbb{Z})$. Зауважимо, що якщо говорять, що дискретний сигнал належить $l_2(\mathbb{Z})$, то $\sum_{i \in \mathbb{Z}} |p_i|^2 = \|p\|_{l_2(\mathbb{Z})}^2 < +\infty$.

Згідно теореми Котельникова аналоговий сигнал з обмеженим спектром може бути точно перетворений в дискретний сигнал і потім точно відтворений за відліками цього дискретного сигналу [10]. Практично будь-який аналоговий сигнал має обмежений спектр і тому може бути замінений при правильно обраній частоті дискретизації відповідним дискретним сигналом. Якщо ж спектр сигналу фінітний і $h \rightarrow 0$, то для точ-

ного відтворення можна скористатись таким виразом:

$$p(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} p_i \frac{\sin(\pi(t-ih)/h)}{(\pi(t-ih)/h)}. \quad (7)$$

Головним обмеженням при застосуванні виразу (7) є обчислювальна складність – для інтерполяції потрібно використовувати усі відліки, що не виправдано, наприклад, при апроксимації сигналу на локальних інтервалах визначення.

Загальновідомо [8; 9], що будь-яка функція (сигнал) $p(t) \in L_2(\mathbb{R})$ має єдино можливий розклад у ряд

$$p(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} c_i \varphi(t-ih),$$

де $\varphi(t)$ – функції, що є базисом Рисса в $L_2(\mathbb{R})$, тобто:

$$0 < C_{\min} \|c\|_{l_2(\mathbb{Z})} \leq \overbrace{\left\| \sum_{i \in \mathbb{Z}} c_i \varphi(t-ih) \right\|_{L_2(\mathbb{R})}}^{\|p(t)\|_{L_2(\mathbb{R})}} \leq C_{\max} \|c\|_{l_2(\mathbb{Z})} < \infty,$$

де $\{c_i\} \in l_2(\mathbb{Z})$ – коефіцієнти розкладу; C_{\min} , C_{\max} – деякі константи.

З іншого боку доведено [9, с.148-149], що базис B -сплайнів є базисом Рисса, отже

$$p(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} c_i B_{r,h}(t-ih), \quad r \geq 1, \quad (8)$$

де c_i , $i \in \mathbb{Z}$ визначаються із інтерполяційних умов та розв'язку відповідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$p(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} c_i^{(r)} B_{r,h}(t-ih) \Big|_{t=ih}, \quad r \geq 1, \quad i \in \mathbb{Z}. \quad (9)$$

При цьому, зважаючи на скінченність носіїв d_r B -сплайнів, в кожному рядку визначника такої системи не рівними нулю буде лише r елементів (значень сплайнів $B_{r,h}(t)$) та розташовані такі елементи будуть уздовж головної діагоналі [1]. Останнє й забезпечує простоту обчислення коефіцієнтів інтерполяції.

З розв'язку системи (9) отримують фундаментальний сплайн

$$S_r(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} c_i^{(r)} B_{r,h}(t-ih), \quad r \geq 1,$$

що має інтерполяційні властивості. Вочевидь, послідовність $\{c_i^{(r)}\}$ не є

скінченою. Проте, показано [9, с.181-182], що члени послідовності $\{c_i^{(r)}\}$ спадають до нуля експоненціально швидко при $i \rightarrow \pm\infty$. Це означає, що й фундаментальний сплайн $S_r(t)$ також прямує до нуля з тією ж швидкістю при $t \rightarrow \pm\infty$, що забезпечує збіжність для $\forall x \in \mathbb{R}$ сплайн-рядів

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} p(ih) S_r(t - ih), \quad r \geq 1.$$

В реальній практиці можуть виникати ситуації, коли інтерполяція сигналу саме за виразом (8) є недоречною. Отже, поставимо за мету у подальшому викладенні подати можливість апроксимації $p(t)$ за використанням моделей на основі лінійних комбінацій B -сплайнів (4), близьких до інтерполяційних у середньому.

Виклад основного матеріалу. Зазвичай при фіксації аналогового сигналу має місце наступне. Нехай $\phi(t)$ – функція імпульсного відклику системи, що реєструє сигнал $p(t)$. В силу суто технічних властивостей систем реєстрації, результатом згортки сигналу та функції відклику буде значення, усереднене на інтервалі дискретизації, зокрема:

$$(p * \phi)(ih) = \frac{1}{h} \int_{ih - \frac{h}{2}}^{ih + \frac{h}{2}} p(t) \phi(t - ih) dt = \bar{p}_i.$$

Тоді цифровий сигнал може мати таке подання:

$$p_i = \bar{p}_i + \varepsilon_i, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad (10)$$

де ε_i – випадкова вада. Стосовно вади ε_i , $i \in \mathbb{Z}$ можна припускати будь-який розподіл, проте за замовченням вважають, що має місце розподіл Гауса з нульовим математичним сподіванням, дисперсією σ_ε^2 та функцією щільності

$$f(\varepsilon; 0, \sigma_\varepsilon) = \frac{1}{\sigma_\varepsilon \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma_\varepsilon^2}}. \quad (11)$$

Таким чином, при використанні даних (10) для побудови інтерполяції (8) на основі (9) приходимо до хибного оцінювання сигналу. Причому, згідно нерівності Чебишева (для довільного $\nu > 0$ виконується

$$P\{|\xi - E\{\xi\}| \geq \nu\} \leq \frac{D\{\xi\}}{\nu^2},$$

похибка буде тим більшою, чим більшою є дисперсія σ_ε^2 . Отже, виникає задача при побудові моделі сигналу викори-

стовувати апроксимації, що враховують випадкову природу даних, зокрема, оператори інтерполяційні в середньому або близькі до інтерполяційних у середньому.

Наприклад, для B -сплайнів другого порядку в роботі [3] для апроксимації функції $p(t)$ за значеннями типу (10) у вузлах розбиття Δ_h , подано такі сплайни, близькі до інтерполяційних у середньому:

$$S_{2,0}(p, t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} p_i B_{2,h}(t - (i + 0,5)h), \quad (12)$$

$$S_{2,1}(p, t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(p_i - \frac{1}{6} \Delta^2 p_i \right) B_{2,h}(t - (i + 0,5)h), \quad (13)$$

$$S_{2,2}(p, t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(p_i - \frac{1}{6} \Delta^2 p_i + \frac{1}{36} \Delta^4 p_i \right) B_{2,h}(t - (i + 0,5)h), \quad (14)$$

де $\Delta^{2u} p_i = \Delta^{2u-2} p_{i+1} - 2\Delta^{2u-2} p_i + \Delta^{2u-2} p_{i-1}$, $u = 1, 2, \dots$

Якщо обрати в якості моделі сигналу $p(t)$ сплайни (13), (14), то така оцінка за певних умов є фактично асимптотично точною. Зокрема, якщо довільна функція $f(t)$ неперервна на деякому відрізку $[a, b]$, то

$$\|f(t)\|_{C[a,b]} = \|f(t)\|_{L_\infty(a,b)},$$

де $C[a, b]$ – простір неперервних на $[a, b]$ функцій $f(t)$ з нормою

$$\|f(t)\|_{C[a,b]} = \max_{a \leq t \leq b} |f(t)|.$$

Тоді, припускаючи, що $p(t) \in C^3$, то при $h \rightarrow 0$ буде вірно наступне [8]:

$$\|p(t) - S_{2,u}(p, t)\|_C \leq \frac{h^3}{12\sqrt{3}} \|p^{(3)}(t)\|_C + \varepsilon \|S_{2,u}(p, t)\|_C + o(h^3), \quad u = 1, 2,$$

де $|\varepsilon_i| < \varepsilon$, $i \in \mathbb{Z}$ та $\|S_{r,u}(p, t)\| = \sup_{|\varepsilon_i|} \max_t |S_{r,u}(\varepsilon, t)|$, $r \geq 1$ – норма

сплайн-оператора $S_{r,u}(p, t)$ і при цьому

$$\|S_{2,1}(p, t)\|_C = \frac{4}{3} \|p(t)\|_C, \quad \|S_{2,2}(p, t)\|_C = \frac{3}{2} \|p(t)\|_C.$$

Похибка апроксимації може бути ще меншою, якщо за модель обрати, наприклад таку лінійну комбінацію B -сплайнів четвертого порядку [4]:

$$S_{4,2}(p, t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(p_i - \frac{1}{4} \Delta^2 p_i + \frac{13}{240} \Delta^4 p_i \right) B_{4,h}(t - (i + 0,5)h). \quad (15)$$

Зокрема, при $h \rightarrow 0$ для довільної функції $p(t) \in C^5$ має місце:

$$\|p(t) - S_{4,2}(p,t)\|_C \leq \frac{h^4}{280} \|p^{(4)}(t)\|_C + \varepsilon \|S_{4,2}(p,t)\|_C + o(h^5),$$

де $\|S_{4,2}(p,t)\|_C = \frac{697}{480} \|p(t)\|_C$.

Фактично відмовляючись при моделюванні сигналу $p(t)$ від виконання інтерполяційних умов, використання виразів (13) – (15) дозволяє обійтись без розв'язання системи рівнянь (9). Якщо ж подати зазначені сплайни у явному вигляді, отримаємо формули для локальної апроксимації у вигляді поліному відповідного ступеня. Наприклад, для $S_{2,1}(p,t)$ має місце такий вираз, що неважко одержати, підставивши (5) в (13):

$$S_{2,1}(p,t) = \frac{1}{48} \left(-(1-x)^2 p_{i-2} + (2-16x+10x^2) p_{i-1} + (46-18x^2) p_i + (2+16x+10x^2) p_{i+1} - (1+x)^2 p_{i+2} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad (16)$$

де $x = 2(t - (i + 0,5)h)/h, |x| \leq 1$. (17)

Якщо ж в якості апроксимації сигналу обрати вираз (12) або будь-яку іншу комбінацію B -сплайнів такого типу:

$$S_{r,0}(p,t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} p_i B_{r,h}(t - ih), \quad r \geq 2, \quad (18)$$

то отримаємо модель з властивостями імпульсного нерекурсивного низькочастотного фільтру [5]. Зокрема, в роботі [9, стор.102], приведено доведення, що як і функція Гауса, будь-який B -сплайн порядку вище першого може бути використаний для визначення коротковіконного перетворення Фур'є (КВПФ). Отже, якщо $B_r(t), r \geq 2$ – B -сплайн порядку r , то

$$\hat{B}_r(\omega) = \left(\frac{1 - e^{i\omega}}{i\omega} \right)^r = e^{-ir\omega} \left(\frac{\sin(\omega/2)}{(\omega/2)} \right)^r$$

або так (як в роботі [8]):

$$\hat{B}_r(\omega) = \left(\frac{e^{i\omega/2} - e^{-i\omega/2}}{i\omega} \right)^{r+1} = \left(\frac{\sin(\omega/2)}{(\omega/2)} \right)^{r+1}. \quad (19)$$

Для прикладу, згідно (19) подамо (рис.2) графіки частотних характеристик B -сплайнів нульового, другого та п'ятого порядків.

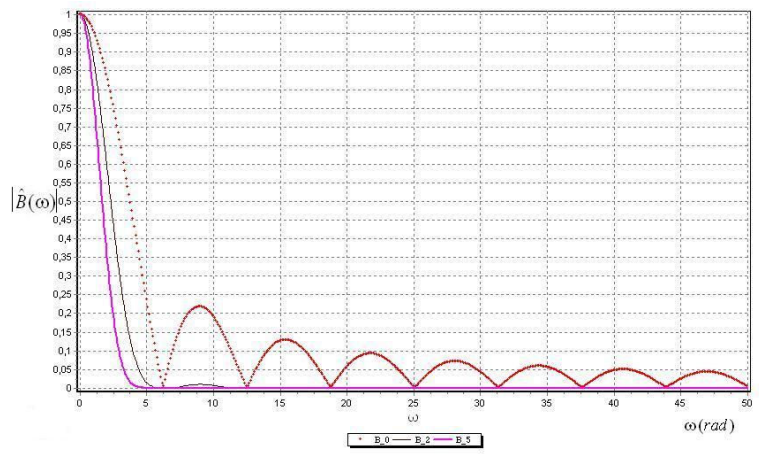


Рис.2. Частотні характеристики B -сплайнів нульового, другого та п'ятого порядків

Видно (рис.3), що вже починаючи з порядку $r = 5$ і B -сплайн, і гаусіан в частотній області фактично не відрізняються, при цьому обчислюнок B -сплайну п'ятого порядку [12] потребує менше обчислювальних затрат.

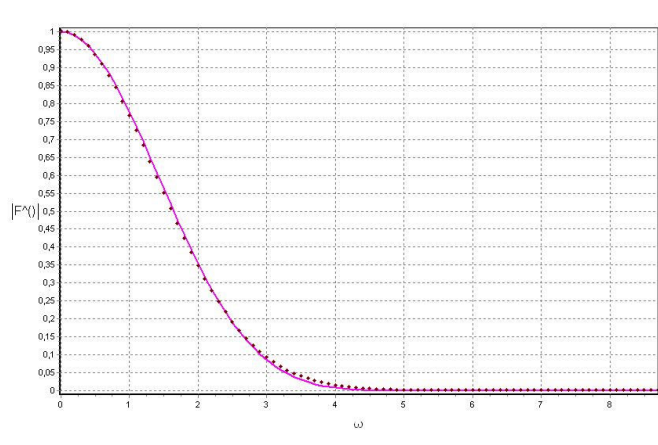


Рис.3. B -сплайн п'ятого порядку (сплошна лінія) та гаусіан (крапки) з $\sigma = 0,725$

Якщо є потреба в отриманні цифрового низькочастотного фільтру, то достатньо в моделі (18) визначити значення сплайну у вузлах розбиття

Δ_h [13]. Для $r = 2$ можна розгорнуто записати $S_{2,0}(p, t)$ так:

$$S_{2,0}(p, t) = \frac{1}{8} \left((1-x)^2 p_{i-1} + (6-2x^2) p_i + (1+x)^2 p_{i+1} \right), \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Якщо покласти в (17) $x = 0$ отримаємо:

$$S_{2,0}(p, ih) = (p_{i-1} + 6 \cdot p_i + p_{i+1}) / 8, \quad i \in \mathbb{Z},$$

або ж результат низькочастотної фільтрації на основі фільтру можемо записати так:

$$p\mathcal{H}_i^{(S_{2,0})} = \sum_{j=i-1}^{i+1} p_j \cdot \gamma_{j-i}^{(2,0)}, \quad i \in \mathbb{Z},$$

де
$$\gamma^{(2,0)} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

відповідна маска низькочастотного фільтру. Для прикладу при $r = 5$ має місце такий низькочастотний фільтр:

$$p\mathcal{H}_i^{(S_{5,0})} = \sum_{j=i-2}^{i+2} p_j \cdot \gamma_{j-i}^{(5,0)}, \quad i \in \mathbb{Z},$$

де
$$\gamma^{(5,0)} = \frac{1}{120} \begin{pmatrix} 1 \\ 26 \\ 66 \\ 26 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ефективність фільтрації згідно моделі (18) за даними (10) при відносно значних величинах параметра σ в (11) можна підвищити якщо робити фільтр рекурсивним. З іншого боку за умови стаціонарності сигналу $p(t)$ (або, принаймні, локальної стаціонарності) вплив похибки можна практично нівелювати шляхом локального усереднення значень відліків p_i , $i \in \mathbb{Z}$ на інтервалах довжиною $\tilde{h} = N \cdot h$ (не зменшуючи загальності нехай N кратне двом):

$$\tilde{p}_i = \frac{1}{N+1} \sum_{j=-N/2}^{N/2} p_{i-j} = \frac{1}{N+1} \left(\sum_{j=-N/2}^{N/2} \bar{p}_{i-j} + \sum_{j=-N/2}^{N/2} \varepsilon_{i-j} \right), \quad (20)$$

$$\tilde{i} = (N+1) \cdot i, \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Вочевидь, чим більшою є величина N , тим гарантовано ближчою до нуля є величина

$$\bar{\varepsilon}_i = \frac{1}{N+1} \sum_{j=-N/2}^{N/2} \varepsilon_{i-j},$$

(як оцінка математичного сподівання випадкової величини розподіленої за стандартним нормальним розподілом). З іншого боку оцінка $\bar{\varepsilon}_i$ є незсуненою за умови симетричності закону розподілу вади, тому в реальній практиці обчислень цілком прийнятним, з точки зору близькості до нуля, може бути й відносно невеликі значення величини N . Якщо обрати за α величину ймовірності того, що отримана на будь-якому з \tilde{i} -х інтервалів усереднення величина $\bar{\varepsilon}_i$ статистично відмінна від нуля, то тоді (згідно t -тесту для перевірки гіпотези $H_0 : \bar{\varepsilon}_i = 0$, $\tilde{i} = (N+1) \cdot i$, $i \in \mathbb{Z}$) з ймовірністю $1-\alpha$ можна нехтувати впливом похибки після інтервального усереднення за даними (10) коли виконується така нерівність:

$$\left| \frac{\bar{\varepsilon}_i}{\sigma_\varepsilon} \sqrt{N+1} \right| \leq t_{\alpha/2, \nu},$$

де $t_{\alpha/2, \nu}$ – квантиль t -розподілу Стьюдента; $\nu = N$ – кількість степенів вільності. Останній вираз засвідчує, що кількість даних усереднення має бути меншою при меншій величині σ_ε . І навпаки, при значній варіабельності цифрового сигналу ширина \tilde{h} інтервалу усереднення має бути більшою.

Модель, аналогічна (18) за даними (20) така:

$$S_{r,0}(p,t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \tilde{p}_i B_{r,h}(t - i\tilde{h}), \quad r \geq 2,$$

при цьому похибку апроксимації сигналу $p(t)$ можна оцінити з урахуванням довжини \tilde{h} інтервалів усереднення.

Висновок. Проведені дослідження дають право рекомендувати поліноміальні сплайни на основі B -сплайнів, близькі до інтерполяційних у середньому для побудови моделей аналогових сигналів з кінцевою енергією. Подібне ствердження підкріплене як теоретичним обґрунтуванням, так і практичними уявленнями про природу сигналу та його цифрового подання, на основі котрого відбувається апроксимація. Обчислювальна простота розглянутих сплайн-операторів дозволяє рекомендувати їх для реалізації у програмному забезпеченні обробки цифрових сигналів, в тому числі для систем, що функціонують у режимі реального часу.

Подальша робота може бути спрямована на отримання швидкодіючих обчислювальних схем та нових лінійних операторів на основі таких сплайнів, а також на їх експериментальне дослідження при обробці цифрових сигналів.

Література.

1. Корнейчук Н.П. Сплаины в теории приближения. -М.: Наука, 1984.- 351 с.
2. Де Бор К. Практическое руководство по сплайнам.- М.: Радио и связь, 1985.- 303 с.
3. Лигун А.А., Шумейко А.А. Асимптотические методы восстановления кривых.- К.: ИМ НАНУ, 1997.- 358 с.
4. Приставка П.О. Поліноміальні сплайни при обробці даних. – Д.: Вид-во Дніпропетр. ун-ту, 2004. – 236 с.
5. Василенко В.А., Зюзин М.В., Ковалков А.В. Сплайн-функции и цифровые фильтры (под ред. А.С. Алексеева). – Новосибирск: Вычислительный центр СО АН СССР, 1984. – 141 с.
6. Шелевицький І.В. Методи та засоби сплайни-технології обробки сигналів складної форми. – Кривий Ріг: Європейський університет, 2002 р. – 304 с.
7. Денисюк В.П., Марченко Б.Г. Сплаины и их приложения в задачах моделирования и обработки вычислительных сигналов.- Киев: КПИ, 1995. – 246 с.
8. M. Unser, "Splines: A Perfect Fit for Signal and Image Processing," *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 16, no. 6, pp. 22-38, 1999.
9. Чуи Ч. Введение в вэйвлеты // Пер. с. англ. –М.: Мир, 2001. –412 с.
10. Ярославский Л.П. Введение в цифровую обработку изображений. – М.: Сов. Радио, 1979. – 312с.
11. Лигун А.А., Кармазина В.В. О восстановлении эмпирической функции плотности распределения с помощью гистосплайнов второго порядка/ Днепродзержинский индустр. ин-т.- Днепродзержинск, 1989.-30 с.- Деп. в УкрНИИТИ 8.06.89, N1559- Ук89.
12. Приставка П.О., Чолишкіна О.Г. Дослідження *B*-сплайну п'ятого порядку та їх лінійної комбінації / Математичне моделювання. – ДДТУ, Дніпродзержинськ. – 2007. - №1(16). - С.14-17.
13. Приставка П.О. Обчислювальні аспекти застосування поліноміальних сплайнів при побудові фільтрів / Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій.- Д.: Вид-во Дніпропетр. ун-ту.- 2006. -Т.10. – С.3-14.