

УДК 519.876.5:620.178.16(045)

О.А. Вишневський  
О.С. Давидов, канд. фіз.-мат. наук

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ АБРАЗИВНОГО ЗНОСУ ПОВЕРХОНЬ МАТЕРІАЛІВ З УРАХУВАННЯМ ДЕФОРМАЦІЇ

Кафедра вищої математики, НАУ

Наведено математичні моделі залежності об'ємного зносу і зносу за масою поверхонь матеріалів, а також площі прилягання гумового ролика та зразка від розмірів деформованого ролика, лінійного зносу, зернистості абразивних частинок сферичної форми і величини деформації. Виконано порівняльну оцінку роботи моделей у першому та другому наближеннях з експериментальними залежностями.

### Постановка проблеми

Математичне моделювання процесів абразивного зносу матеріалів дозволяє прогнозувати поведінку деталей вузлів тертя та інших машин у разі попадання на їх поверхні в процесі експлуатації частинок мінерального походження  $\text{SiO}_2$ , глинозему, гірських порід, продуктів зносу поверхонь самих деталей. Для забезпечення більш тривалої працездатності елементів конструкцій і їх конструкційних матеріалів, що працюють в умовах зносу з нежорстко закріпленими абразивними частинками, виникає потреба в розробленні прискорених методик і критеріїв оцінки процесів зносу матеріалів і їх покриттів на основі відповідних математичних моделей.

### Огляд публікацій та аналіз невирішених проблем

Питаннями моделювання процесу абразивного зносу різних матеріалів займалися найвідоміші спеціалісти в галузі тертя та зносу [1–4], але такі моделі носили порівняльний характер або не включали в себе весь спектр характерних параметрів.

У деяких існуючих моделях [5–8] основу становить імовірнісно-статистичний підхід, але недоліком зазначених моделей є громіздкість і незручність у використанні, оскільки вони містять обмежену кількість характерних параметрів, які впливають на зносостійкість.

У праці [9] встановлено зв'язок між ваговим зносом і максимальною глибиною лунки, а також площею поверхні лунки в першому наближенні (без урахування деформації).

У праці [10] розглянуто модель залежності абразивної зносостійкості матеріалів від навантаження та густини (без урахування деформації).

У праці [11] змодельовано процеси абразивного зносу матеріалів залежно від лінійного зносу та розмірів деформованого ролика, але не враховано величину деформації.

Види і механізми абразивного зносу конструкційних матеріалів описано в працях [2–4].

Дослідники визначають різноманітність факторів, що визначають той або інший вид зносу і механізм його розвитку, що пояснює складність математичного моделювання цих процесів.

Виникає потреба у створенні універсальної моделі, яка б враховувала вплив багатьох факторів на процес зносу.

**Мета** статті – розробити математичну модель процесів абразивного зносу за масою й об'ємного зносу матеріалів та покриттів залежно від лінійного зносу та розмірів абразивних частинок, розмірів та величини деформації гумового ролика, побудувати модель залежності площі поверхні прилягання ролика та зразка від лінійного зносу і зернистості абразиву, розмірів та величини деформації ролика.

### Результати моделювання

У процесі побудови математичної моделі абразивного зносу поверхонь матеріалів припустимо, що деформований ролик у перерізі має форму еліпса. Розглянемо переріз деформованого гумового ролика, який зображено на рис. 1. Половина частини гумового ролика, що увійшла у зразок, заштрихована.

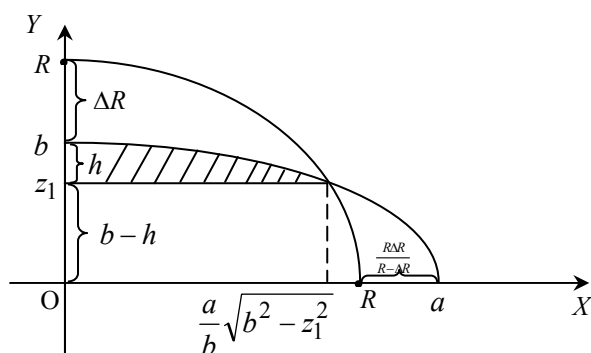


Рис. 1. Поперечний переріз деформованого і недеформованого гумових роликів:

$R$  – радіус недеформованого гумового ролика;  
 $a$  – велика піввісь еліпса;  $b$  – мала піввісь еліпса;  
 $h$  – лінійний знос (максимальна глибина лунки);  
ордината  $z_1 = b - h$ ,  $b = R - \Delta R$

Рівняння еліпса, що отримаємо при перпендикулярному перерізі гумового ролика відносно його осі, має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (1)$$

З рівняння (1) отримаємо вираз для функції  $y(x)$ , графік якої зображено на рис. 1:

$$y(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}. \quad (2)$$

Під час деформації ролика будемо вважати, що об'єми недеформованого і деформованого роликів однакові, тобто

$$\pi abd = \pi R^2 d.$$

Звідси отримаємо, що

$$a = \frac{R^2}{b}.$$

Ураховуючи, що

$$b = R - \Delta R,$$

отримаємо

$$a = \frac{R^2}{R - \Delta R}. \quad (3)$$

У праці [11] побудовано моделі залежності об'ємного зносу і зносу за масою поверхонь матеріалів від лінійного зносу, густини матеріалу та розміри гумового ролика.

Модель об'ємного зносу поверхонь матеріалів від лінійного має вигляд

$$I_v = abd \left( \arcsin \sqrt{2\frac{h}{b} - \frac{h^2}{b^2}} - \left(1 - \frac{h}{b}\right) \sqrt{2\frac{h}{b} - \frac{h^2}{b^2}} \right). \quad (4)$$

Якщо позначити відношення  $\frac{h}{b}$  через  $m$ , отримаємо залежність

$$I_v = abd \left( \arcsin \sqrt{2m - m^2} - (1 - m) \sqrt{2m - m^2} \right). \quad (5)$$

Математична модель залежності зносу за масою від лінійного має вигляд

$$I_m = \rho abd \left( \arcsin \sqrt{2\frac{h}{b} - \frac{h^2}{b^2}} - \left(1 - \frac{h}{b}\right) \sqrt{2\frac{h}{b} - \frac{h^2}{b^2}} \right). \quad (6)$$

Аналогічно модель (4) можна записати у вигляді залежності

$$I_v = \rho abd \left( \arcsin \sqrt{2m - m^2} - (1 - m) \sqrt{2m - m^2} \right). \quad (7)$$

З урахуванням розмірів абразивних частинок модель (4) можна записати у вигляді

$$I_v = a(b + 2r)d \left( \arcsin \sqrt{2\frac{h}{b + 2r} - \left(\frac{h}{b + 2r}\right)^2} - \left(1 - \frac{h}{b + 2r}\right) \sqrt{2\frac{h}{b + 2r} - \left(\frac{h}{b + 2r}\right)^2} \right). \quad (8)$$

З урахуванням зернистості модель зносу за масою (6) набуває вигляду

$$I_m = \rho a(b + 2r)d \left( \arcsin \sqrt{2\frac{h}{b + 2r} - \left(\frac{h}{b + 2r}\right)^2} - \left(1 - \frac{h}{b + 2r}\right) \sqrt{2\frac{h}{b + 2r} - \left(\frac{h}{b + 2r}\right)^2} \right). \quad (9)$$

Якщо в моделях (8), (9) виконаємо заміну

$$c = \frac{h}{b + 2r},$$

то отримаємо моделі аналогічні моделям (5), (7). Математичну модель об'ємного зносу поверхонь матеріалів та покриттів можна буде подати у вигляді залежності

$$I_v = abd \left( \arcsin \sqrt{2c - c^2} - (1 - c) \sqrt{2c - c^2} \right),$$

а відповідну модель зносу за масою – у вигляді

$$I_m = \rho abd \left( \arcsin \sqrt{2c - c^2} - (1 - c) \sqrt{2c - c^2} \right).$$

З урахуванням величини деформації і моделей (4)–(7) отримаємо:

а) математичну модель об'ємного зносу поверхонь матеріалів:

$$I_v = R^2 d \left( \arcsin \sqrt{2\frac{h}{R - \Delta R} - \left(\frac{h}{R - \Delta R}\right)^2} - \left(1 - \frac{h}{R - \Delta R}\right) \sqrt{2\frac{h}{R - \Delta R} - \left(\frac{h}{R - \Delta R}\right)^2} \right);$$

б) математичну модель зносу за масою поверхонь матеріалів:

$$I_m = \rho R^2 d \left( \arcsin \sqrt{2\frac{h}{R - \Delta R} - \left(\frac{h}{R - \Delta R}\right)^2} - \left(1 - \frac{h}{R - \Delta R}\right) \sqrt{2\frac{h}{R - \Delta R} - \left(\frac{h}{R - \Delta R}\right)^2} \right);$$

в) математичну модель об'ємного зносу з урахуванням зернистості:

$$I_v = (R + 2r)^2 \times \left[ \arcsin \sqrt{2 \frac{h}{R + 2r - \Delta R} - \left( \frac{h}{R + 2r - \Delta R} \right)^2} - \left( 1 - \frac{h}{R + 2r - \Delta R} \right) \times \sqrt{2 \frac{h}{R + 2r - \Delta R} - \left( \frac{h}{R + 2r - \Delta R} \right)^2} \right];$$

г) математичну модель зносу за масою з урахуванням зернистості:

$$I_m = \rho(R + 2r)^2 d \times \left[ \arcsin \sqrt{2 \frac{h}{R + 2r - \Delta R} - \left( \frac{h}{R + 2r - \Delta R} \right)^2} - \left( 1 - \frac{h}{R + 2r - \Delta R} \right) \times \sqrt{2 \frac{h}{R + 2r - \Delta R} - \left( \frac{h}{R + 2r - \Delta R} \right)^2} \right].$$

Для часткового випадку, коли деформації по осях  $Ox$  і  $Oy$  однакові, маємо

$$\Delta R = \frac{R^2}{R - \Delta R} - R.$$

Після відповідних алгебричних перетворень отримаємо неповне квадратне рівняння відносно невідомої  $\Delta R$ :

$$\Delta R(R - \Delta R) = R\Delta R. \tag{10}$$

Розв'язком рівняння (10) буде  $\Delta R = 0$ .

Тобто однакові ненульові деформації по осях координат неможливі, за умови, що недеформований ролик форми кругового циліндру під час деформації прийме форму еліптичного циліндра. Для знаходження площі поверхні прилягання гумового ролика та зразка розглянемо метод наближеного обчислення площі поверхонь, оскільки точне значення неможливо отримати безпосереднім інтегруванням.

У праці [11] виведено формулу залежності довжини дуги перерізу деформованого ролика від його розмірів і від лінійного зносу:

$$l = \int_0^{\frac{a}{b}\sqrt{2bh-h^2}} \sqrt{1 + \frac{b^2 x^2}{a^2(a-x)^2}} dx. \tag{11}$$

З урахуванням величини деформації формула (11) буде мати вигляд

$$l = \int_0^{\frac{R^2}{(R-\Delta R)^2}\sqrt{2(R-\Delta R)h-h^2}} \sqrt{1 + \frac{(R-\Delta R)^4 x^2}{R^4 \left( \frac{R^2}{R-\Delta R} - x \right)^2}} dx. \tag{12}$$

Площу прилягання ролика і зразка можна знайти за формулою

$$S_{\text{пов}} = 2ld,$$

де  $d$  – ширина ролика.

Інтеграл (12) для визначення довжини дуги обчислюємо наближено за допомогою програми, виконаної мовою “Фортран” [12].

Блок-схема даної програми складається з основної частини (рис. 1) і підпрограми INT (рис. 2).

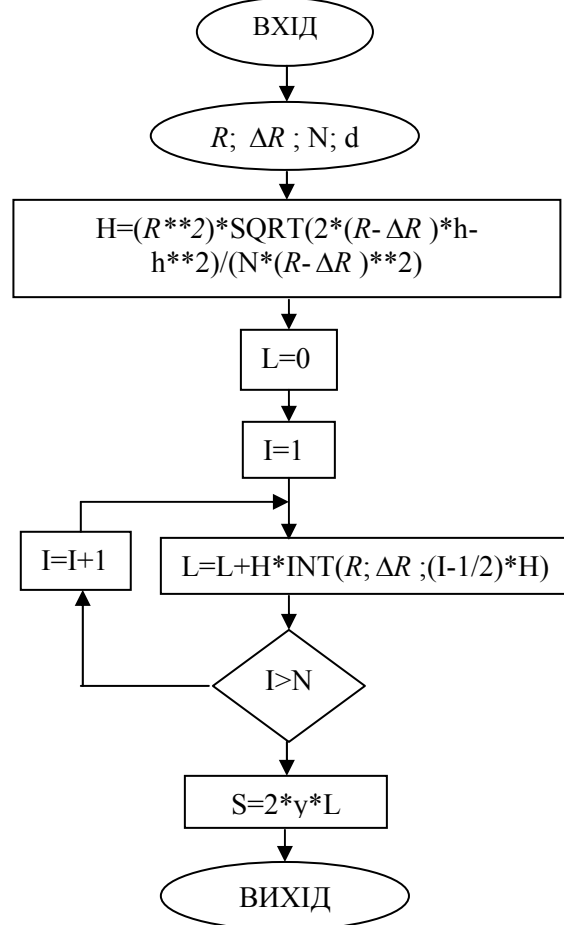


Рис. 1. Програма INT

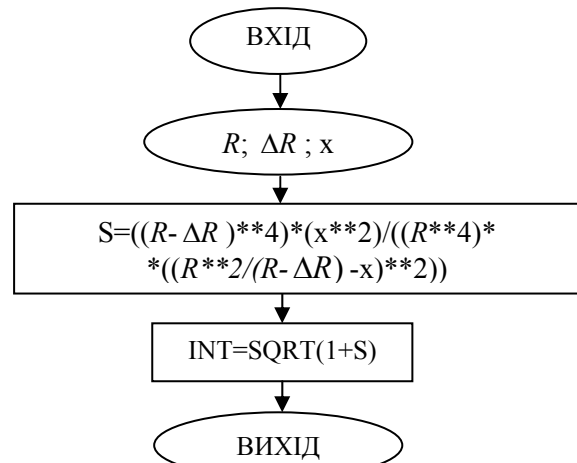


Рис. 2. Підпрограма INT

Програму для обчислення довжини дуги можна реалізувати за мовою “Фортран” і подати у вигляді

```

READ _R, ΔR, N, d
H = (R**2)*SQRT(2*(R - ΔR)*h - h**2)/(N *
*(R - ΔR)**2)
L = 0
DO _1 _I = 1, N
  1_L = L + H * INT(a, b, (I - 1/2) * H)
  S = 2 * d * L
  STOP
END

```

Довжину половини дуги ФКС з урахуванням розмірів сферичних абразивних частинок можна обчислити за допомогою інтеграла

$$l_1 = \int_0^{\frac{(R+2r)^2}{(R-\Delta R+2r)^2} \sqrt{2(R-\Delta R+2r)h-h^2}} \sqrt{1 + \frac{(R-\Delta R+2r)^4 x^2}{(R+2r)^4 \left(\frac{(R+2r)^2}{R-\Delta R+2r} - x\right)^2}} dx \quad (13)$$

Площу прилягання ролика і зразка можна обчислити за формулою

$$S_{\text{пов}} = 2l_1 d.$$

Важливим параметром, який впливає на зносостійкість матеріалів, є розмір абразивних частинок. З урахуванням зернистості інтеграл (13) і площу прилягання ролика та зразка можна наближено обчислити за допомогою програми:

```

EAD _R, ΔR, N, d, r
H = ((R + 2r)**2) * SQRT(2*(R - ΔR + 2r)*h - h**2)/
(N*(R - ΔR + 2r)**2)
L = 0
DO _1 _I = 1, N

```

$$1\_L = L + H * INT\left(R, \Delta R, r, \left(I - \frac{1}{2}\right) * H\right)$$

```

S = 2 * d * L
STOP
END

```

Вираз, що стоїть під знаком інтеграла (13), можна знайти за допомогою підпрограми INT:

```

FUNCTION_INT(R, ΔR, r, x)
S = ((R - ΔR + 2r)**4) * (x**2) / (((R + 2r)**4) *
*((R + 2r)**2 / (R - ΔR + 2r) - x)**2)
INT = SQRT(1 + S)
RETURN
END

```

Розглянемо експериментальні дані з абразивного зносу поверхні Ст.30 для кварцового піску SiO<sub>2</sub> зернистості 160–200 мкм у вигляді матриці, перший стовпчик якої – довжина шляху тертя в метрах, а другий – знос за масою у грамах.

$$data := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 30 & 0,0044 \\ 60 & 0,0081 \\ 90 & 0,0112 \\ 120 & 0,0137 \\ 150 & 0,0156 \end{pmatrix}$$

На рис. 3 показано експериментальну залежність зносу за масою від шляху тертя (1) та результати моделювання цього процесу у другому наближенні (з урахуванням деформації  $f_2(x)$  у першому наближенні, без урахування деформації  $f_3(x)$ ) [9].

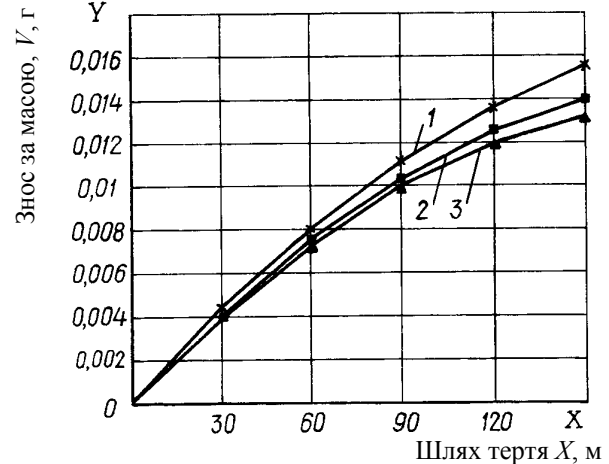


Рис. 3. Експериментальні залежності абразивного зносу за масою поверхонь матеріалів від шляху тертя для Ст.30 нормалізованої (1) і реалізація моделей у першому (3) і другому (2) наближеннях

Співвідношення між величиною вагового абразивного зносу поверхонь матеріалів підтверджується відповідними значеннями твердості цього матеріалу – 95,5 НВ (виміри твердості проводили на приладі ТШ-2М). Результати моделювання показують, що залежності  $f_2(x)$  і  $f_3(x)$  відрізняються на 5 %, що дає підставу обмежитися моделюванням у першому наближенні (враховуючи простоту моделей першого наближення).

## Висновки

1. Побудовано моделі об'ємного зносу та зносу за масою поверхонь матеріалів у другому наближенні (з урахуванням деформації) у разі нежорстко закріплених абразивних частинок.

2. Виконано математичне моделювання залежності площі поверхні прилягання ролика та зразка від лінійного зносу та розмірів деформованого ролика і абразивних частинок.

3. Наведено порівняльний аналіз відповідності математичних моделей абразивного зносу за масою поверхонь матеріалів у першому та другому наближеннях експериментальним залежностям.

### Література

1. *Тененбаум М.М.* Износостойкость конструкционных материалов и деталей машин. – М.: Машиностроение, 1966. – 331 с.
2. *Каргельский И.В., Добычин М.Н., Комбалов В.С.* Основы расчетов на трение и износ. – М.: Машиностроение, 1977. – 527 с.
3. *Ханин М.В.* Механическое изнашивание материалов. – М.: Изд-во стандартов, 1984. – 152 с.
4. *Хрущов М.М., Бабичев М.А.* Абразивное изнашивание. – М.: Наука, 1970. – 252 с.
5. *Галахов М.А., Усов П.П.* Дифференциальные и интегральные уравнения математической теории трения. – М.: Наука, 1990. – 278 с.
6. *Борисова А.Л.* Совместимость тугоплавких соединений с металлами и графитом: Справ. – К.: Наук. думка, 1985. – 247 с.
7. *Кутыков А.А.* Износостойкие антифрикционные покрытия. – М.: Машиностроение, 1976. – 152 с.
8. *Федоренко И.М., Пугина Л.И.* Композиционные спеченные антифрикционные материалы. – Мінськ: Наука і тэхніка, 1980. – 403 с.
9. *Вишневський О.А.* Модель залежності величини абразивного зносу від лінійного // Вісн. НАУ. – 2004. – №1. – С. 122–125.
10. *Вишневський О.А.* Модель залежності оцінки абразивної зносостійкості матеріалів від навантаження та густини // Вісн. НАУ. – 2004. – №2. – С. 86–90.
11. *Вишневський О.А., Давидов О.С.* Нелінійне математичне моделювання процесу абразивного зносу матеріалів // Вісн. НАУ. – 2005. – №1. – С. 101–104.
12. *Ющенко Е.Л., Переход И.А., Платонова О.П., Ющенко А.А.* Фортран: Программированное учеб. пособие для вузов по спец. «Прикл. математика» /Под ред. Е.Л. Ющенко. – К.: Вища шк., 1989. – 406 с.

Стаття надійшла до редакції 14.03.05.

О.А. Вишневский, А.С. Давыдов

Математическое моделирование процессов абразивного износа поверхностей материалов с учетом деформации. Приведены математические модели зависимости объемного и весового износа поверхностей материалов, а также площади прилегания резинового ролика и образца от размеров деформированного ролика, линейного износа, зернистости абразивных частиц сферической формы и величины деформации. Дана сравнительная оценка работы модели в первом и втором приближениях с экспериментальными зависимостями.

O.A. Vishnevsky, A.S. Davidov

Mathematical modelling of process of abrasive deterioration of surfaces of materials

Mathematical models of dependence of volumetric and weight deterioration of surfaces of materials and also the areas of a touch of a rubber roller and a sample from the sizes of the deformed roller, linear deterioration and granularity of abrasive particles are resulted. Work of models in boundary conditions is shown. The comparative estimation of model work in the first and second approximation is given.