Комбінаторні аспекти топологічної класифікації функцій на колі

The combinatorial aspects of a topological classification of functions on the circle

Ірина Аркадіївна Юрчук

Київський національний університет ім. Т. Шевченка,

вул. Володимирська 64, 01033, Київ-33, Україна

iyurch@ukr.net, тел. 80972173323

27 квітня 2007 р.

Анотація

Доведено необхідну та достатню умову топологічної еквівалентності гладких функцій зі скінченим числом локальних екстремумів, що задані на колі.

The necessary and sufficient condition of a topological equivalence of smooth functions with a finite number of local extrema, which given on the circle is proved.

В роботах Арнольда В.І. [1], [2] вивчаються питання класифікації морсифікацій особливостей гладких функцій, топології біфуркаційних діаграм, а також описані їх зв'язки з комбінаторикою. Зокрема, було встановлено, що у випадку, якщо число критичних точок рівне числу критичних значень функції, яка задана на колі, то її комбінаторним інваріантом є так звана змія (послідовність додатних цілих чисел, які задовольняють умові $x_0 < x_1 > x_2 < \dots x_n$). В даній роботі розглянуто загальний випадок гладких функцій на колі, які мають скінчене число локальних екстремумів. Основна мета – побудувати комбінаторний інваріант та встановити критерій топологічної еквівалентності для функції з даного класу.

1 Деякі комбінаторні відомості.

Нагадаємо декілька означень, які можна знайти в [1, с. 4].

Означення 1.1. Змією типуA_n називається послідовність додатних цілих чисел x_i, які задовольняють умовам: $x_0 < x_1 > x_2 < \dots x_n$, $x_i \neq x_j$, де $0 \leq x_i \leq n$.

Послідовність чисел, які задовольняють системі нерівностей $x_0 < x_1 > x_2 < \dots x_n$ $(x_0 > x_1 < x_2 > \dots x_n)$ називається *up down* (*down up*)– послідовністю.

Позначимо через a_n число A_n – змій і запишемо експоненційну генератрису числа даних змій:

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n / n!. \qquad (1)$$

У формулі (1) числа a_n з непарними n утворюють коефіцієнти розкладу секанса та називаються числами Ейлера (позначають через E_i), а з парними n - тангенса в ряд Тейлора в нулі і називаються числами тангенса (T_i). Ці числа утворюють трикутник типу Паскаля, з якого знаходять їх значення. Нижче наведено перші значення чисел T_i .

i	1	2	3	4	5	6
T_i	1	2	16	272	7936	353792

Означення 1.2. Елементарною змією типу L_m^n назвемо послідовність додатних цілих чисел x_i, що задовольняють умовам: $x_0 < x_1 > x_2 < \dots x_n$ і $x_i \neq x_j$, де $0 \leq x_i \leq m$, $m > n$.

Позначимо число елементарних змій типу L_m^n через l_m^n.

Лема 1.1. *Число l_m^n елементарних змій L_m^n рівне числу $C_{m+1}^{n+1} \cdot a_n$, де a_n - число A_n – змій.*

Доведення. Не обмежуючи загальності, розглянемо змію L_m^n: $x_0 < x_1 > x_2 < \dots x_n$ і $x_i \neq x_j$, де $0 \leq x_i \leq m$, $m > n$. Тоді, знайдемо $\min\limits_i \{x_i\} = x_{j_1}$ та покладемо $x_{j_1} = 0$, $\{x_i'\} = \{x_i\} \backslash x_{j_1}$. Далі, знайдемо $\min\limits_i \{x_i'\} = x_{j_2}$ та покладемо $x_{j_2} = 1$, $\{x_i''\} = \{x_i'\} \backslash x_{j_2}$ і т.д. В результаті, ми множині $\{x_i\}$ поставимо у відповідність множину $\{0, 1, ...n\}$, скориставшись умовою, що $x_i \neq x_j$, отримаємо змію типу A_n. Зрозуміло, що біноміальний коефіцієнт виникає, як число можливих варіантів вибору $(n+1)$ числа з $(m+1)$, оскільки $m > n$. □

Означення 1.3. Змією типу R_m^n називається послідовність додатних цілих чисел x_i, які задовольняють умовам: $x_0 < x_1 > x_2 < \dots x_n$, де $0 \leq x_i \leq m$, $m < n$ і для $\forall k, k \in [0, \dots, m]$ існує принаймні одне значення $i, i \in [0, \dots, n]$ таке, що $x_i = k$.

У випадку, коли $m = n$ число R_m^n – змій рівне числу A_n– змій. Позначимо через $\alpha_{m,k}^n$ число R_m^n – змій в яких $x_0 = 0$ і $k = x_1 - x_0 - 1 = x_1 - 1$.

Твердження 1.1. *Для $\forall\, n, m \in N$ справедлива рівність*

$$\alpha_{m,k}^{n+1} = \sum_{j=m-k-1}^{m-1} \alpha_{m,j}^n + \sum_{j=m-k-1}^{m-2} \alpha_{m-1,j}^n \,, \tag{2}$$

де $0 \leq k \leq m-1$.

Доведення. Не обмежуючи загальності, знайдемо значення $\alpha_{m,k}^{n+1}$, де $n, m \in N$, $0 \leq k \leq m-1$. Згідно позначень, це число послідовностей, що задовольняють наступну систему нерівностей

$$0 < k+1 > x_2 < x_3 > \dots, \tag{3}$$

де $0 \leq x_2 \leq k$. Відмітимо, що число таких послідовностей рівне числу послідовностей виду

$$x_2 < x_3 > x_4 < \dots, \tag{4}$$

де $0 \le x_2 \le k$. Розглянемо дифеоморфізм $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, який змінює напрям осі, і запишемо (4) у вигляді $x'_2 > x'_3 < \ldots$, де $m - k \le x'_2 \le m$. В отриманій системі нерівностей, записавши зліва нуль, отримаємо $0 < x'_2 > x'_3 < \ldots$ та розглянемо дві можливості: якщо існує $x'_j = m$, то їх число рівне $\sum\limits_{i=m-k-1}^{m-1} \alpha^n_{m,i}$, а в іншому випадку це число $\sum\limits_{i=m-k-1}^{m-2} \alpha^n_{m-1,i}$. Далі, додавши ці два числа, отримаємо (2). Зауважимо, що остання сума виникає з умови, якщо у послідовності (3) лише $x_0 = 0$ і решта $x_i \neq 0$, а при дифеоморфізмі f нулеві відповідає m. □

Наслідок 1.1. *Для* $\forall\, n, m \in N$ *справедлива рівність* $\alpha^{n+1}_{m,0} = \alpha^n_{m,m-1}$.

Зрозуміло, рівність (2) – це рекурентне співвідношення, яке пов'язує число R^n_m – змій з числом R^{n+1}_m – змій. У табл.1 наведено значення $\alpha^n_{m,k}$ для випадків, коли $n = \overline{2,6}$.

Табл. 1: Значення чисел $\alpha^n_{m,k}$.

	n=2		**n=3**			**n=4**				**n=5**					**n=6**					
$m \diagdown k$	0	1	0	1	2	0	1	2	3	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	5
1	1		1			1				1					1					
2	0	1	1	2		2	4			4	7				7	12				
3			0	1	1	1	4	5		5	13	16			16	36	45			
4						0	1	2	2	2	9	14	15		15	45	67	74		
5										0	2	4	5	5	5	25	43	54	56	
6															0	5	10	14	16	16
$\sum$	**2**		**6**			**22**				**102**					**562**					

Позначимо через μ^n_m число R^n_m – змій для яких тільки $x_0 = 0$, а всі решта $x_i \neq 0$, $i \in [1, \ldots, n]$. Очевидно, що справедлива нерівність $\mu^n_m < \sum\limits_{i=1}^{m-1} \alpha^n_{m,i}$.

Наслідок 1.2. *Для* $\forall\, n, m \in N$ *справедлива рівність*

$$\mu^n_{m+1} = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha^n_{m,i} - \mu^n_m. \tag{5}$$

Доведення. Побудуємо послідовність $0 < x_1 > x_2 < \ldots x_n$, де $x_i \neq 0$, $0 < x_i \le m + 1$, $i \in [1, \ldots, n]$ враховуючи, що $0 < x_1 > x_2 < \ldots x_n$, де $0 \le x_i \le m$, $i \in [1, \ldots, n]$ за допомогою додавання числа 1 до всіх членів крім $x_0 = 0$. Причому з числа побудованих послідовностей виключаємо число тих, де $\nexists i \in [1, \ldots, n]$ для яких $x_i = 0$, в іншому випадку в утвореній послідовності не існуватиме $x_i = 1$ і $0 \leq x_i \leq m$. А це рівносильне тому, щоб від числа всіх послідовностей відняти число μ_m^n. $\square$

У таблиці 2 наведено значення чисел μ_m^n при $n = 3, \ldots, 9$. Згідно співвідношення (5) число $\mu_4^5 = \alpha_{3,0}^5 + \alpha_{3,1}^5 + \alpha_{3,2}^5 - \mu_3^5 = 5 + 13 + 16 - 10 = 24$. Зрозуміло, що $\mu_n^n = a_{n-1}$.

Відмітимо, що всі значення чисел $\alpha_{m,k}^n$ та μ_m^n у таблицях 1 і 2 отримані аналогічно за допомогою рекурентних співвідношень.

Табл. 2: Значення чисел μ_m^n.

$m \setminus n$	3	4	5	6	7	8	9
2	1	1	1	1	1	1	1
3	2	5	10	18	31	52	86
4		5	24	79	223	579	1432
5			16	122	602	2439	8856
6				61	680	4682	25740
7					272	4155	38072
8						1385	27776
9							7936

2 Окремі випадки функцій на S^1.

Позначимо через S^1 – коло, тобто множину комплексних чисел z таких, що $|z| = 1$. Надалі, будемо розглядати S^1, як диференційований многовид розмірності 1. Задамо на S^1 орієнтацію і розглянемо довільну ***гладку функцію f на S^1 зі скінченим числом локальних екстремумів***. Слід відмітити, що число локальних екстремумів завжди парне. Позначимо через m_i та M_j, $i, j = \overline{1, n}$ відповідно точки мінімуму та максимуму даної функції. Рухаючись по колу в заданому напрямі та нумеруючи окремо локальні мінімуми та максимуми, отримаємо одну з двох можливих послідовностей, які утворюють локальні екстремуми: $M_1, m_1, M_2, ..., M_n, m_n$ або $m_1, M_1, m_2, ..., m_n, M_n$. Очевидно, що перша послідовність справедлива тоді, коли починаємо рух з локального максимуму функції, а друга – з локального мінімуму.

Нагадаємо, що функції f та g, які задані на колі, називаються топологічно еквівалентними, якщо існують гомеоморфізми $h : S^1 \to S^1$ і $r : R^1 \to R^1$, які зберігають орієнтацію, і такі, що $f = r^{-1} \circ g \circ h$.

Означення 2.1. Функція f називається ***спеціальною***, якщо в довільних двох локальних екстремумах вона приймає різні значення.

Зауважимо, що топологічна класифікація функцій Морса загального положення та спеціальних функцій на колі співпадає.

Теорема 2.1. *Число топологічно нееквівалентних* ***спеціальних*** *функцій f, заданих на S^1, з $2n$ локальними екстремумами, рівне T_n.*

Доведення. Розглянемо S^1 та спеціальну функцію f, яка має $2n$ локальних екстремумів. Зауважимо, що серед локальних екстремумів завжди існує дві точки глобального мінімуму та максимуму . Не обмежуючи загальності, починаючи з глобального мінімуму та в заданому напрямі на S^1, позначимо локальні екстремуми через $x_0, x_1, x_2, ..., x_{2n-1}$ і отримаємо послідовність значень функції $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \ldots, y_{2n-1} = f(x_{2n-1})$, які задовольняють наступній системі нерівностей $y_0 < y_1 > \ldots < y_{2n-3} > y_{2n-2} < y_{2n-1}$. Задамо відображення $y_i \to z_i$, де $i, z_i \in [0, 1, \ldots, 2n-1]$ і z_i рівне числу значень y_l таких, що $y_l < y_i$. Числа z_i утворюють *up down* послідовність, яка визначає A_{2n-1} – змію. Зауважимо, що це відображення взаємно однозначне: топологічно нееквівалентним функціям, відповідають різні змії і навпаки – кожна змія реалізує деяку функцію. Отриману змію можемо записати наступним чином

$$0 < z_1 > z_2 < \ldots z_{2n-1} \tag{6}$$

і позначимо число таких змій через a'_{2n-1}. Очевидно, що виконується наступна нерівність $a'_{2n-1} < a_{2n-1}$. Доведемо, що $a'_{2n-1} = a_{2n-2}$, або, що те ж саме, числу T_n. Запишемо дану систему нерівностей у наступному вигляді

$$z_1 > z_2 < \ldots < z_{2n-1}, \tag{7}$$

де $2 \leq z_1 \leq 2n-1$, та отримаємо *down up* послідовність. Зауважимо, що числа послідовностей (6) та (7) рівні між собою. За допомогою гомеоморфізму осі z, який змінює напрям осі і зберігає порядок, перетворимо (7) у *up down* послідовність та отримаємо $z'_0 < z'_1 > \ldots z'_{2n-2}$, де $0 \leq z'_0 \leq 2n-3$. Звідки випливає, що число послідовностей рівне числу a_{2n-2}. □

Зауваження 2.1. Відмітимо, що у роботі [2, с. 550] автор вказує, що число топологічно нееквівалентних спеціальних функцій на колі, рівне числу E_n, а не T_n.

Зауваження 2.2. L.I. Nicolaescu в [3] довів гіпотезу Арнольда про те, що для числа топологічно нееквівалентних функцій Морса загального положення $f : S^2 \to \mathbb{R}$, з $2n+2$ числом критичних точок справедлива рівність

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log g(n)}{n \log n} = 2.$$

Якщо позначити через $G(n)$ число топологічно нееквівалентних спеціальних функцій $f : S^1 \to \mathbb{R}$ з $(2n+2)$ числом критичних точок, то справедливо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log G(n)}{n \log n} = 2.$$

Оскільки, $G(n) = T_n$ і для T_n справедливе наступне співвідношення $T_n = \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{2n} B_n$, $B_n \sim \frac{2(2n)!}{2^{2n}\pi^{2n}}$, то запишемо $T_n \sim \frac{2(2^{2n}-1)(2n-1)!}{\pi^{2n}}$ і згідно формули Стірлінга $n! = \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} e^{\frac{\theta_n}{12n}}$ отримаємо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log G(n)}{n \log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(\frac{2(2^{2n}-1)(2n-1)!}{\pi^{2n}})}{n \log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n \log(\frac{2}{\pi}) + 2n \log n)}{n \log n} + \theta(n) = 2,$$

де $\theta(n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Твердження 2.1. *Число топологічно нееквівалентних функції f з $2n$ локальними екстремумами, серед яких лише один глобальний мінімум (максимум), та k різних значень, які приймає функція в даних екстремумах ($k < 2n$), рівне μ_{k-1}^{2n-1}.*

Доведення. Не обмежуючи загальності, розглянемо випадок єдиного глобального мінімуму. Тоді, починаючи з нього та в заданому напрямі на S^1, позначимо локальні екстремуми через $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}$ і отримаємо наступну послідовність критичних значень функції $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{2n-1}$, серед яких є k різних. Задамо відображення $y_i \to z_i$, де $z_i \in [0, \dots, k]$, і z_i рівне числу критичних значень y_l таких, що $y_l < y_i$. Згідно умови, існує єдиний локальний екстремум – мінімум x_0 для якого $z_0 = 0$. Рухаючись по колу в заданому напрямі, утворимо деяку послідовність цілих чисел $0 < z_1 > z_2 < \dots < z_{2n-1}$, де $z_i \neq 0$, $z_i \leq k-1$. Тоді, згідно означення, це змія типу R_{k-1}^{2n-1}, причому лише $z_0 = 0$ і всі решта $z_i \neq 0$. Число таких змій рівне μ_{k-1}^{2n-1}.

Відмітимо, для доведення твердження у випадку одного глобального максимуму достатньо розглянути функцію $(-f)$. □

Зауваження 2.3. При знаходженні числа топологічно нееквівалентних функцій у доведенні Твердження 2.1 суттєвим було те, що ми однозначно починали будувати змію з глобального мінімуму. У випадку довільної функції f, заданої на S^1, однозначної відповідності між функцією та змією не існує. Розглянемо одну й ту ж функцію висоти на колі (рис.1), але, починаючи будувати змію з "різних" глобальних мінімумів, ми утворимо різні змії.

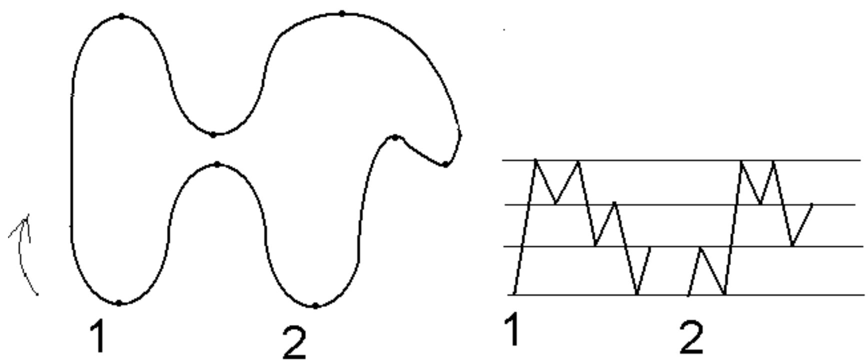

Рис. 1: Функція з двома глобальними мінімумами та максимумами і відповідні їй різні змії.

3 Загальний випадок функцій на S^1.

Нехай $f : S^1 \to R$ деяка гладка функція зі скінченим $(2n)$ числом локальних екстремумів, серед яких – m глобальних максимумів та k різних значень, які приймає функція в $2n$ екстремумах $(k < 2n)$. Зрозуміло, що тоді серед локальних екстремумів існує принаймні два, значення функції в яких, співпадають. На далі, під функцією f будемо розуміти лише таку, що задовольняє вказаним вище умовам.

Побудуємо комбінаторний інваріант для функції f. Зафіксуємо деякий напрям обходу на колі і позначимо m глобальних максимумів через $x_0, x_1, ..., x_{m-1}$. Для кожного x_i знайдемо дугу S_i^0 таку, що значення функції y_i в локальних екстремумах дуги S_i^0 є різними. Причому, кінцями даних дуг будуть локальні мінімуми. Нехай $x_{1,i}$ - перший локальний екстремум (мінімум), що лежить на колі за максимомум x_i в напрямі, що протилежний до напрямку обходу, а $x^{i,1}$ – перший локальний екстремум (мінімум) в напрямі, що співпадає з напрямком обходу, $x_{2,i}$ і $x^{i,2}$ відповідно другі і т.д. Утворимо наступну послідовність локальних екстремумів $x_{l^i,i}, ..., x_{1,i}, x_i, x^{i,1}, ..., x^{i,r^i+1}$, що відповідає глобальному максимуму x_i і належить дузі S_i^0, кінцями якої є $x_{l^i,i}$ і x^{i,r^i+1} (локальні мінімуми). Кожній такій послідовності екстремумів відповідає послідовність значень функції, оскільки вони є різними і локальний мінімум чергується з локальним максимумом, то справедлива наступна система нерівностей $y_{l^i,i} < ... > y_{1,i} < y_i > y^{i,1} < ... < y^{i,r^i}$ (відкинемо значення y^{i,r^i+1}, що відповідає x^{i,r^i+1}), а згідно означення це є елементарна змія $L_{k-1}^{l^i+r^i}$. Відмітимо, що можливі такі випадки:

C1) $S_j^0 \bigcap S_{j+1}^0 = \varnothing$;

C2) $S_j^0 \bigcap S_{j+1}^0 = x^{j,t_2^j+1} = x_{t_1^{j+1},j+1}$;

C3) $S_j^0 \bigcap S_{j+1}^0 = S_{j,j+1}^0$, де $S_{j,j+1}^0 \subset S_j^0 \cup S_{j+1}^0$;

Найпростішими є випадки $C1$ та $C2$, в яких дуги, що відповідають глобальним максимумам x_i, або не мають спільних точок, або мають лише одну - локальний мінімум. У випадку $C3$ послідовність екстремумів дуги $S_{j,j+1}^0$ можемо записати у вигляді $x^{j,r'}, ..., x^{j,r^i+1}$

або $x_{l^{j+1},j+1},...,x_{l',j+1}$, де $x_{k,j+1} \in S^0_{j+1}$, $x^{j,k} \in S^0_j$, зрозуміло, що значення функції в цих локальних екстремумах утворюють елементарну змію.

Тоді, з двох даних дуг утворимо три, одна з яких – $S^0_{j,j+1}$, а решта дві такі, що $S^0_j \setminus S^0_{j,j+1}$ і $S^0_{j+1} \setminus S^0_{j,j+1}$. Зауважимо, що для пари дуг S^0_j та $S^0_{j,j+1}$ (S^0_j та $S^0_{j,j+1}$) справедливо $C2$. Перепозначимо отримані дуги і запишемо наступне розбиття $\Gamma_0 = \bigcup\limits_{i=0}^{n} \widetilde{S}^0_i$ (зрозуміло, що в загальному випадку $n \geq m-1$).

Далі, розглянемо $S^1 \setminus \Gamma_0 = \bigcup \gamma^0_i$, де $\bigcap \gamma^0_i = \varnothing$. Для кожної з дуг γ^0_i знайдемо локальні максимуми, значення функції в яких найбільше, та утворимо розбиття дуг γ^0_i на $\Gamma^i_1 = \bigcup\limits_s S^1_{i,s}$, де кожній дузі $S^1_{i,s}$ відповідає елементарна змія, утворена значеннями функції в локальних екстремумах, які їй належать. Далі розглянемо $S^1 \setminus \Gamma_0 \bigcup \Gamma^i_1 = \gamma^1_i$ та по аналогії, для кожної з дуг γ^1_i знайдемо локальні максимуми, значення функції в яких найбільше, і т.д. Оскільки число локальних екстремумів скінчене, то за деяке число кроків ми розіб'ємо коло S^1 на дуги $\widetilde{S}_i$, яким відповідають елементарні змії $L^{a_i}_{k-1}$. Слід відмітити, що для довільної пари сусідніх дуг $\widetilde{S}_{i-1}$ та $\widetilde{S}_i$ справедлива умова $C2$.

Означення 3.1. $\Omega(f)$ - розбиттям кола, що відповідає деякій функції f, назвемо його розбиття на дуги S_i, з кінцями в локальних мінімумах, і такі, що значення функції в локальних екстремумах даних дуг, утворюють елементарні змії $L^{a_i}_{k-1}$.

Лема 3.1. *Для довільної функції f існує і єдине, з точністю до циклічного порядку дуг S_i, $\Omega(f)$ - розбиття.*

Доведення. Доведення випливає з наведених вище міркувань та однозначності побудови $\Omega(f)$ - розбиття. □

Означення 3.2. Два розбиття $\Omega(f)$ та $\Omega(g)$ кола назвемо ізоморфними ($\Omega(f) \sim \Omega(g)$), якщо:

1) для довільної дуги $S_i \subset \Omega(f)$ існує єдина дуга $S'_j \subset \Omega(g)$ така, що відповідні їм елементарні змії $L^{a_i}_{k-1}$ та $L^{b_j}_{k-1}$ співпадають;

2) циклічний порядок відповідних дуг розбиттів $\Omega(f)$ та $\Omega(g)$ співпадає.

Теорема 3.1. *Дві функції f та g на колі топологічно еквівалентні тоді і тільки тоді, коли $\Omega(f) \sim \Omega(g)$.*

Доведення. Необхідність. Доведення необхідності випливає з Леми 3.1 та означення топологічної еквівалентності.

Достатність. Нехай f та g деякі функції на колі такі, що $\Omega(f) \sim \Omega(g)$, де $\Omega(f)$, $\Omega(g)$ розбиття кола, що їм відповідають. Доведемо, що функції f та g топологічно еквівалентні. Зрозуміло, що число дуг для $\Omega(f)$ та $\Omega(g)$ одне й те ж, покладемо його рівним q. Оскільки набори чисел $\{a_i\}$ і $\{b_j\}$ співпадають, то числа локальних екстремумів функцій f та g, які визначається за допомогою рівностей $\sum\limits_i a_i + q$ та $\sum\limits_j b_j + q$, відповідно, рівні між собою.

Не обмежуючи загальності, розглянемо $S_0 \subset \Omega(f)$, тоді згідно означення існує $S'_i \subset \Omega(g)$ така, що $L^{a_0}_{k-1} = L'^{b_i}_{k-1}$ і $a_0 = b_i$. Запишемо наступні дві послідовності, що утворені елементарними зміями $(L^{a_0}_{k-1}, L^{a_1}_{k-1}, ..., L^{a_q}_{k-1})$ та $(L'^{b_i}_{k-1}, L'^{b_{i+1}}_{k-1}, ..., L'^{b_{i-1}}_{k-1})$ зрозуміло, що вони співпадають і $f \sim g$. □

Знайдемо верхню оцінку числа $N(f,q)$ топологічно нееквівалентних функцій із заданим інваріантом: $\Omega(f) = L^{t_0}_{k-1}, L^{t_1}_{k-1}, ..., L^{t_q}_{k-1}$. Згідно Леми 1.1 справедливо $l^{t_i}_{k-1} = C^{t_i+1}_k \cdot a_{t_i}$. Проте, слід зауважити, що вибір t_{i+1} значення з набору $\{0, 1, ..., k-1\}$ для змії $L^{t_{i+1}}_{k-1}$ залежить від вибору чисел, що утворюють попередню змію $L^{t_i}_{k-1}$, тому число таких можливостей менше за коефіцієнт $C^{t_i+1}_k$. І другий істотній момент, що не всі змії типу A_{t_i} можливі, оскільки положення останнього максимуму змії $L^{t_i}_{k-1}$ залежить від положення першого мінімуму наступної змії $L^{t_{i+1}}_{k-1}$. Тому, врахувавши циклічний порядок $(q+1)$ числа дуг на колі, отримаємо наступну оцінку зверху:

$$\Theta(q) = q! \cdot C^{t_0+1}_k \cdot a_{t_0} \cdot C^{t_1+1}_k \cdot a_{t_1} \cdot ... \cdot C^{t_q+1}_k \cdot a_{t_q}. \tag{8}$$

Лема 3.2. *Для числа $N(f,q)$ – топологічно нееквівалентних функцій із заданим інваріантом $\Omega(f) = L^{t_0}_{k-1}, L^{t_1}_{k-1}, ..., L^{t_q}_{k-1}$ справедливо $N(f,q) < \Theta(q)$, де число $\Theta(q)$ задовольняє рівності (8).*

Зауважимо, що $N(f,q) = \Theta(q)$ у випадку, коли $q = 1$, тобто f є спеціальною функцією.

4 Висновки.

В даній статті побудовано комбінаторний інваріант гладких функцій, заданих на колі, зі скінченим числом локальних екстремумів. Розглянуто випадок, коли число критичних значень функції не дорівнює числу локальних екстремумів. Інваріантом такої функції є $\Omega(f)$ - розбиття кола S^1 на дуги S_i, значення функції в їх локальних екстремумах, утворюють елементарні змії. Доведено, що необхідною та достатньою умовою топологічної еквівалентності функцій f та g, заданих на колі, є ізоморфізм розбиттів $\Omega(f)$ та $\Omega(g)$, що їм відповідають.

Література

[1] *Арнольд В.И.* Исчисление змей и комбинаторика чисел Бернулли, Эйлера и Спрингера групп Кокстера //Успехи математических наук – 1992. – **т.47**. вып.1(283) – С.3–45.

[2] *Arnold V.I.* Bernoulli – Euler updown numbers, associated with function singularities, their combinatorics and a mathematics //Duke Math.Journ. – 1991.– **63**. №2. – P.537–555.

[3] *Nicolaescu L.I.* Morse functions statistics// `arXiv:math.GT/0604437 vI 20 Apr 2006`