МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний авіаційний університет

О. П. Олійник, С. В. Олійник, А. В. Рилов

СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

Навчально-методичний посібник

Київ 2021

УДК 512.64(076.5)
О542

Рецензенти: О. А. Білятинський–д-р техн. наук, проф.
(Національний транспортний університет);
Д. Я. Требенко–канд. фіз.-мат. наук, доц.
(Національний педагогічний університет
ім. М .П .Драгоманова);
В. Г. Дегтярь–канд. фіз.-мат. наук, доц.
(Національний транспортний університет).

Затверджено на засіданні науково-методично-редакційної ради Інституту доуніверситетської підготовки НАУ 14 березня 2005 року.

Олійник О. П.

О 542 Системи лінійних алгебраїчних рівнянь : навч .-метод. посіб. / О. П. Олійник, С. В. Олійник, А. В. Рилов. – 3-є вид., стер. – К. : НАУ, 2021. - 84 с.

ISBN 978-966-598-693-5

У посібнику розглянуто основні точні методи дослідження і розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Для слухачів підготовчих курсів інституту доуніверситетської підготовки.

УДК 512.64(076.5)

ISBN 978-966-598-693-5

ПЕРЕДМОВА

Пропонований навчально-методичний посібник підготовлений відповідно до програм з математики для слухачів підготовчих курсів ІДП НАУ. Його мета - допомогти абітурієнтам та слухачам підготовчих курсів при вищих навчальних закладах оволодіти точними методами розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

В посібнику подано такі точні методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь як метод підстановки, метод виключення невідомих, в тому числі і метод Гаусса та метод Крамера . Розглянуті задачі згруповані здебільшого за методами розв'язування. Наводяться приклади розв'язання не лише основних типових задач, а також деяких нетрадиційних. Оскільки у посібнику приділено значну увагу методам розв'язування, то там де це мало сенс, розглядаються інші методи розв'язання раніше розглянутих задач, що допоможе слухачам знаходити найбільш раціональні методи їх розв'язування.

Розглянуто багато задач з параметрами та модулями. А також підібрано великий різновид вправ для самостійного розв'язання, до яких подаються відповіді.

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І ОЗНАЧЕННЯ

Системою p лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n$ називається система вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pn}x_n = b_p. \end{cases} \qquad (1)$$

Величини $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}, \ldots, a_{p1}, a_{p2}, \ldots, a_{pn}$ називаються коефіцієнтами даної системи рівнянь, причому a_{ij} - коефіцієнт, що знаходиться в i-тому рівнянні при невідомому x_j, де $i = 1,2,\ldots,p$; $j = 1,2,\ldots,n$. Величини $b_1, b_2, \ldots, b_p$ називаються вільними членами першого, другого,…, р-го рівнянь системи. Система рівнянь (1) називається однорідною, якщо всі числа b_i дорівнюють нулю, де $i = 1,2,\ldots,p$, і неоднорідною, якщо хоча б одне b_i відмінне від нуля.

Упорядкована множина n чисел $(k_1; k_2; k_3; \ldots; k_n)$ називається розв’язком системи (1), якщо при підстановці його в систему замість невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_n$ усі рівняння системи перетворюються в тотожність. Розв’язати систему рівнянь – означає знайти всі її розв’язки або довести, що розв’язків немає.

Система рівнянь називається сумісною, якщо вона має хоча б один розв’язок, і несумісною, якщо вона не має жодного розв’язку. Сумісна система лінійних рівнянь називається визначеною, якщо вона має єдиний розв’язок. Сумісна система лінійних рівнянь називається невизначеною, якщо розв’язків більше ніж один.

Система однорідних рівнянь завжди має нульовий розв’язок (0;0;…;0). Якщо система однорідних рівнянь має ненульовий розв’язок $(k_1; k_2; k_3; \ldots; k_n)$, тобто хоча б одне з чисел k_i відмінне від нуля, то така система має незліченну множину розв'язків виду $(t \cdot k_1; t \cdot k_2; \ldots; t \cdot k_n)$, де $t \in R$.

Дві системи рівнянь рівносильні, якщо будь-який розв'язок першої системи є розв'язком другої і всякий розв'язок другої системи є розв'язком першої. Дві несумісні системи вважаються рівносильними.

ТОЧНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ДВОМА НЕВІДОМИМИ

Розглянемо систему $\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1, \\ a_2 x + b_2 y = c_2, \end{cases}$ (2),

де x, y - невідомі, a_i, b_i, c_i - числові коефіцієнти, $i = 1,2$. Розв'язком такої системи називається упорядкована пара $(x_\circ; y_\circ)$ при підстановці якої в систему кожне її рівняння перетворюється в тотожність.

Якщо $a_1 = b_1 = c_1 = a_2 = b_2 = c_2 = 0$, то будь-яка пара чисел буде розв'язком даної системи.

Якщо ж $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = 0$, але $c_1 \neq 0$ або $c_2 \neq 0$, то система не має жодного розв'язку, тобто несумісна.

Якщо $a_1 = b_1 = c_1 = 0$ і $a_2 \neq 0$, то система набуває вигляду $\begin{cases} 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0, \\ x = \dfrac{c_2 - b_2 y}{a_2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{c_2 - b_2 \mathrm{t}}{a_2}, \\ y = \mathrm{t}, \text{ де } \mathrm{t} \in R, \end{cases}$ тобто має безліч розв'язків виду $\left(\dfrac{c_2 - b_2 \mathrm{t}}{a_2}; \mathrm{t} \right)$, де $\mathrm{t} \in R$.

Якщо $a_1 = b_1 = c_1 = 0$ і $b_2 \neq 0$, то система набуває вигляду $\begin{cases} 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0, \\ y = \dfrac{c_2 - a_2 x}{b_2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \mathrm{t}, \\ y = \dfrac{c_2 - a_2 \mathrm{t}}{b_2}, \text{ де } \mathrm{t} \in R, \end{cases}$ тобто має безліч розв'язків виду $\left(t; \dfrac{c_2 - a_2\,t}{b_2}\right)$, де $t \in R$.

Якщо $a_2 = b_2 = c_2 = 0$ і $a_1 \neq 0$, то система набуває вигляду $\begin{cases} x = \dfrac{c_1 - b_1 y}{a_1}, \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{c_1 - b_1\,t}{a_1}, \\ y = t,\ \text{де}\ t \in R, \end{cases}$ тобто має безліч розв'язків виду $\left(\dfrac{c_1 - b_1\,t}{a_1}; t\right)$, де $t \in R$.

Якщо $a_2 = b_2 = c_2 = 0$ і $b_1 \neq 0$, то система набуває вигляду $\begin{cases} y = \dfrac{c_1 - a_1 x}{b_1}, \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t, \\ y = \dfrac{c_1 - a_1\,t}{b_1},\ \text{де}\ t \in R, \end{cases}$ тобто має безліч розв'язків виду $\left(t; \dfrac{c_1 - a_1\,t}{b_1}\right)$, де $t \in R$.

Якщо $a_1 = b_1 = 0$ і $c_1 \neq 0$ або $a_2 = b_2 = 0$ і $c_2 \neq 0$, то система несумісна.

Розглянемо випадок, коли хоч би одне з чисел a_1, b_1 та a_2, b_2 відмінне від нуля, тобто $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$ і $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$. Система $\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1, \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$ називається системою лінійних рівнянь з двома невідомими, де $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$ і $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$.

МЕТОД ПІДСТАНОВКИ

Цей метод полягає в тому, що з одного рівняння визначаємо вираз для однієї змінної і підставляємо його в інше рівняння. Звідси одержуємо значення для цієї змінної, за яким одержимо значення першої змінної.

Нехай $a_1 \neq 0$, тоді виразимо з першого рівняння x:

$x = \dfrac{c_1 - b_1 y}{a_1}$ і підставимо в друге рівняння :

$$a_2 \cdot \frac{c_1 - b_1 y}{a_1} + b_2 y = c_2 \Leftrightarrow a_2(c_1 - b_1 y) + a_1 b_2 y = a_1 c_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_2 c_1 - a_2 b_1 y + a_1 b_2 y = a_1 c_2 \Leftrightarrow (a_1 b_2 - a_2 b_1) y = a_1 c_2 - a_2 c_1 .$$

Якщо $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0,$ то $y = \dfrac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$ і підставивши у вираження x знайдене значення y маємо, що система (2) має єдиний розв’язок $(x_\circ ; y_\circ)$, де $x_\circ = \dfrac{c_1 - b_1 y_\circ}{a_1}$ і $y_\circ = \dfrac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$.

Якщо $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$ і при цьому $a_1 c_2 - a_2 c_1 = 0$, то одержуємо рівність $0 \cdot y = 0$, яка виконується для довільних $y \in R$, тобто в цьому випадку система (2) має безліч розв’язків виду $\left(\dfrac{c_1 - b_1 \cdot \mathrm{t}}{a_1} ; \mathrm{t} \right)$, де $\mathrm{t} \in R$.

Якщо $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$ і при цьому $a_1 c_2 - a_2 c_1 \neq 0$, то одержуємо рівність $0 \cdot y = a_1 c_2 - a_2 c_1$, яка не виконується при жодному значенні y, тобто в цьому випадку система (2) не має розв’язків.

Приклад 1.

Розв’язати систему лінійних рівнянь $\begin{cases} 3x - y + 5 = 0, \\ 4x + 3y - 2 = 0. \end{cases}$

Розв’язання.

З першого рівняння знайдемо $y = 3x + 5$ і піставимо цей вираз в друге рівняння:

$$\begin{cases} 3x - y + 5 = 0, \\ 4x + 3y - 2 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x + 5, \\ 4x + 3(3x + 5) - 2 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x + 5, \\ 13x = -13; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \cdot (-1) + 5, \\ x = -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ y = 2. \end{cases}$$

Відповідь: $\{(x;y)\} = \{(-1;2)\}$.

Приклад 2.

При яких значеннях параметрів a і b система рівнянь $\begin{cases} ax - 2y - 1 = 0, \\ 6x - 4y - b = 0 \end{cases}$ має єдиний розв'язок, має безліч розв'язків та не має жодного розв'язку ?

Розв'язання.

З першого рівняння знайдемо $2y = ax - 1$ і підставимо цей вираз в друге рівняння:

$$\begin{cases} ax - 2y - 1 = 0, \\ 6x - 4y - b = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = ax - 1, \\ 6x - 2(ax - 1) - b = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = ax - 1, \\ (6 - 2a)x = b - 2. \end{cases}$$

Якщо $6 - 2a \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 3$, то система має єдиний розв'язок.

Якщо $\begin{cases} 6 - 2a = 0, \\ b - 2 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3, \\ b = 2, \end{cases}$ то друге рівняння системи набуває вигляду $0 \cdot x = 0$, яке виконується для довільних $x \in R$, тобто система має безліч розв'язків.

Якщо $\begin{cases} 6 - 2a = 0, \\ b - 2 \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3, \\ b \neq 2, \end{cases}$ то друге рівняння системи не виконується при жодному значенні x, тобто в цьому випадку система не має розв'язків.

Відповідь: при $a \neq 3$ система має єдиний розв'язок;
при $a = 3$ і $b = 2$ система має безліч розв'язків;
при $a = 3$ і $b \neq 2$ система не має жодного розв'язку.

МЕТОД ВИКЛЮЧЕННЯ НЕВІДОМИХ

Нехай $a_1 \neq 0,\ a_2 \neq 0$, тоді домножимо перше рівняння системи (2) на a_2, друге на $(-a_1)$ і додамо рівняння:

$$a_2 \cdot a_1 x + a_2 b_1 y - a_1 a_2 x - a_1 b_2 y = a_2 c_1 - a_1 c_2 \Leftrightarrow a_2 b_1 y - a_1 b_2 y =$$

$$= a_2c_1 - a_1c_2 \Leftrightarrow (a_2b_1 - a_1b_2)\cdot y = a_2c_1 - a_1c_2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1 .$$

Далі все аналогічно як і в методі підстановки.

Приклад 1.

Розв'язати систему лінійних рівнянь $\begin{cases} 3x - y + 5 = 0, \\ 4x + 3y - 2 = 0. \end{cases}$

Розв'язання.

Перше рівняння помножимо на 4, а друге на (-3), після чого додамо рівняння і результат запишемо замість другого рівняння початкової системи:

$$\begin{cases} 3x - y + 5 = 0, \\ 4x + 3y - 2 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x - 4y = -20, \\ -12x - 9y = -6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y + 5 = 0, \\ -13y = -26; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{y-5}{3}, \\ y = 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ y = 2. \end{cases}$$

Відповідь: $\{(x; y)\} = \{(-1; 2)\}$.

Приклад 2.

Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} y - 4x = a, \\ 8x - 2y = 1. \end{cases}$

Розв'язання.

Домножимо перше рівняння системи на 2 і додамо до другого рівняння, а результат запишемо замість першого рівняння початкової системи:

$$\begin{cases} y - 4x = a, \\ 8x - 2y = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x + y = a, \\ 8x - 2y = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 2a + 1, \\ 8x - 2y = 1. \end{cases}$$

При $a = -\dfrac{1}{2}$ система набуває вигляду:

$\begin{cases} 0 = 0, \\ 8x - 2y = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0, \\ y = 4x - \dfrac{1}{2}, \end{cases}$ тобто є сумісною і невизначеною та має розв'язок $\left(t;4t-\frac{1}{2}\right)$, де $t\in R$.

При $a\neq-\frac{1}{2}$ система несумісна, оскільки в ній присутнє рівняння $0=2a+1$, яке має зміст лише при $a=-\frac{1}{2}$.

Відповідь: при $a=-\frac{1}{2}$ система має безліч розв'язків виду $\left(t;4t-\frac{1}{2}\right)$, де $t\in R$; при $a\neq-\frac{1}{2}$ система несумісна.

Приклад 3.

При яких значеннях n система рівнянь $\begin{cases}3x+ny=3,\\ 2x-4y=1\end{cases}$ має розв'язок, який задовольняє умови $x>0$ і $y<0$?

Розв'язання.

Домножимо перше рівняння на 2 і додамо до другого рівняння, яке попередньо домножимо на (-3), а результат додавання запишемо замість першого рівняння початкової системи:

$$\begin{cases}3x+ny=3,\\ 2x-4y=1;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(2n+12)y=6-3,\\ 2x-4y=1;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2(n+6)y=3,\\ 2x-4y=1.\end{cases}$$

При $n=-6$ система набуває вигляду $\begin{cases}0\cdot y=3,\\ 2x-4y=1,\end{cases}$ тобто несумісна.

При $n\neq-6$ маємо

$$\begin{cases}2(n+6)y=3,\\ 2x-4y=1;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{3}{2(n+6)},\\ x=\dfrac{1+4y}{2};\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{12+n}{2(n+6)},\\ y=\dfrac{3}{2(n+6)},\end{cases}$$ тобто

система має розв'язок $\left(\frac{12+n}{2(n+6)};\frac{3}{2(n+6)}\right)$. Оскільки, за уиовою, цей розв'язок задовольняє умови $x>0$ і $y<0$, то маємо $\begin{cases}\frac{12+n}{2(n+6)}>0,\\ \frac{3}{2(n+6)}<0;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}n+6<0,\\ 12+n<0;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}n<-6,\\ n<-12;\end{cases} \Leftrightarrow n<-12$.

Відповідь: $n\in(-\infty;-12)$.

Метод Крамера

Поняття визначника виникло при розв'язуванні задачі знаходження загальних формул для розв'язування систем лінійних рівнянь через їх коефіцієнти і вільні члени.

В нашій системі двох лінійних рівнянь з двома невідомими x і y: $\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1,\\ a_2x+b_2y=c_2,\end{cases}$ помножимо перше рівняння на b_2, друге на $(-b_1)$ і додавши ці рівняння одержимо: $(a_1b_2-b_1a_2)x=c_1b_2-c_2b_1$. Аналогічно, перемноживши обидві частини першого рівняння на $(-a_2)$, другого на a_1 і додавши ці рівняння, одержимо: $(a_1b_2-b_1a_2)y=a_1c_2-a_2c_1$. Коефіцієнт при невідимих x і y у лівих частинах одержаних рівнянь один і той самий множник $a_1b_2-b_1a_2$, який називають визначником даної системи.

Визначником другого порядку називається число, що визначається за формулою $\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=a_1b_2-b_1a_2$.

Рівняння нашої системи тепер можна записати у вигляді $\Delta\cdot x=\Delta_x$ та $\Delta\cdot y=\Delta_y$, де через Δ,Δ_x,Δ_y позначають визначники

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - b_1 a_2, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 b_2 - b_1 c_2,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 c_2 - c_1 a_2.$$

Перейдемо тепер безпосередньо до метода Крамера. Для системи (2) можливі два основні випадки: $\Delta \neq 0$ або $\Delta = 0$.

I. Якщо визначник цієї системи $\Delta \neq 0$, то система (2) має єдиний розв'язок $(x_\circ; y_\circ)$, де $x_\circ = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}$, $y_\circ = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}$.

II. Якшо визначник цієї системи $\Delta = 0$, то можливі два випадки:

1) $\Delta_x = \Delta_y = \Delta = 0$ і система (2) має безліч розв'язків, оскільки одне з її рівнянь набуває вигляду $0 \cdot x = 0$ або $0 \cdot y = 0$, і зв'язок між невідомими визначається одним з рівнянь системи (2);

2) $\Delta_x \neq 0$ або $\Delta_y \neq 0$ і система (2) розв'язків не має, оскільки в ній буде присутнім хоч би одне з рівнянь: $0 \cdot x = \Delta_x$ або $0 \cdot y = \Delta_y$, яке не має змісту.

Приклад 1.

Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 3x - y = -5, \\ 4x + 3y = 2. \end{cases}$

<u>Розв'язання.</u>

Знайдемо визначники даної системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - (-1) \cdot 4 = 9 + 4 = 13;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-5) \cdot 3 - (-1) \cdot 2 = -15 + 2 = -13;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - (-5) \cdot 4 = 6 + 20 = 26.$$

Оскільки $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок $(x_\circ; y_\circ)$, де $x_\circ = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{-13}{13} = -1$ та $y_\circ = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = \dfrac{26}{13} = 2$.

Відповідь: $\{(x; y)\} = \{(-1; 2)\}$.

Приклад 2.

Дослідити і розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} 3x + 2y = m(2 - x), \\ 2x + my = 1. \end{cases}$$

Розв'язання.
$$\begin{cases} 3x + 2y = m(2 - x), \\ 2x + my = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3 + m)x + 2y = 2m, \\ 2x + my = 1. \end{cases}$$

Знайдемо визначники даної системи :
$$\Delta = \begin{vmatrix} 3+m & 2 \\ 2 & m \end{vmatrix} = (3 + m)\cdot m - 2\cdot 2 = m^2 + 3m - 4 = (m - 1)(m + 4);$$
$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2m & 2 \\ 1 & m \end{vmatrix} = 2m\cdot m - 2\cdot 1 = 2m^2 - 2 = 2(m - 1)(m + 1);$$
$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3+m & 2m \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (3 + m)\cdot 1 - 2m\cdot 2 = 3 + m - 4m = 3 - 3m =$$
$$= 3(1 - m) = -3(m - 1).$$

Якщо $\Delta \neq 0$, тобто $(m - 1)(m + 4) \neq 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; -4) \cup (-4; 1) \cup (1; \infty)$, то система має єдиний розв'язок $(x_\circ; y_\circ)$, де
$$x_\circ = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{2(m - 1)(m + 1)}{(m - 1)(m + 4)} = \frac{2(m + 1)}{m + 4} \quad \text{та}$$
$$y_\circ = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-3(m - 1)}{(m - 1)(m + 4)} = -\frac{3}{m + 4}.$$

Якщо $\Delta = 0$, тобто $(m - 1)(m + 4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1, \\ m = -4, \end{array}\right.$ то система має безліч розв'язків або зовсім їх не має.

При $m=-4$ маємо: $\Delta=0$, а $\Delta_x=30\neq 0$, тобто система розв'язків не має.

При $m=1$ маємо: $\Delta_x=\Delta_y=\Delta=0$, тобто система має безліч розв'язків. Дослідимо якого вигляду набувають ці розв'язки. При $m=1$ дана система набуває вигляду $\begin{cases}4x+2y=2,\\ 2x+y=1;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y=1,\\ 2x+y=1;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\mathrm{t},\\ y=1-2\,\mathrm{t},\ \text{де}\ \mathrm{t}\in R.\end{cases}$ Отже, при $m=1$ система має безліч розв'язків виду $(\mathrm{t};1-2\,\mathrm{t}),$ де $\mathrm{t}\in R.$

<u>Відповідь:</u> при $m\in(-\infty;-4)\cup(-4;1)\cup(1;\infty)$ система має єдиний розв'язок $\left(\dfrac{2(m+1)}{m+4};-\dfrac{3}{m+4}\right)$; при $m=-4$ система не має розв'язків; при $m=1$ система має безліч розв'язків $(\mathrm{t};1-2\,\mathrm{t}),$ де $\mathrm{t}\in R.$

Приклад 3.

Дослідити і розв'язати систему рівнянь $\begin{cases}ax+2y=2,\\ 2x+by=4.\end{cases}$

<u>Розв'язання.</u>

Знайдемо визначники даної системи :

$$\Delta=\begin{vmatrix}a & 2\\ 2 & b\end{vmatrix}=a\cdot b-4;\quad \Delta_x=\begin{vmatrix}2 & 2\\ 4 & b\end{vmatrix}=2b-8=2\cdot(b-4);$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}a & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix}=4a-4=4\cdot(a-1).$$

Якщо $\Delta\neq 0$, тобто $a\cdot b\neq 4$, то система має єдиний розв'язок $(x_\circ;y_\circ)$, де $x_\circ=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}=\dfrac{2b-8}{ab-4}$ та $y_\circ=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}=\dfrac{4a-4}{ab-4}$.

Якщо $\Delta=0$, тобто $a\cdot b=4$, то слід розглянути окремо два випадки: $a=1$ і при цьому $b=4$ та $a\neq 1$, оскільки $\Delta_x=0$ при $b=4$ та $\Delta_y=0$ при $a=1$.

При $a \cdot b = 4$ і $a \neq 1$ маємо: $\Delta = 0$, а $\Delta_y \neq 0$, тобто система розв'язків не має.

При $a = 1$ і $b = 4$ маємо: $\Delta_x = \Delta_y = \Delta = 0$, тобто система має безліч розв'язків. Дослідимо якого вигляду набувають ці розв'язки. При $a = 1$ і $b = 4$ наша система набуває вигляду:

$$\begin{cases} x + 2y = 2, \\ 2x + 4y = 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 2, \\ x + 2y = 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - 2y, \\ y = \mathrm{t}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - 2\mathrm{t}, \\ y = \mathrm{t}, \text{ де } \mathrm{t} \in R. \end{cases}$$

Тобто, при $a = 1$ і $b = 4$ система має безліч розв'язків виду $(2 - 2\mathrm{t}; \mathrm{t})$, де $\mathrm{t} \in R$.

Відповідь: при $a \cdot b \neq 4$ система має єдиний розв'язок $\left(\frac{2b - 8}{ab - 4}; \frac{4a - 4}{ab - 4} \right)$; при $a \cdot b = 4$ і $a \neq 1$ система розв'язків не має; при $a = 1$ і $b = 4$ система має безліч розв'язків $(2 - 2\mathrm{t}; \mathrm{t})$, де $\mathrm{t} \in R$.

Приклад 4.

Знайти всі значення параметра a, при яких система $\begin{cases} 3x + 2y = 7, \\ ax - 3y = 8 \end{cases}$ має єдиний розв'язок.

Розв'язання.

Знайдемо визначники даної системи: $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ a & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-3) - 2 \cdot a = -9 - 2a$. Дана система має єдиний розв'язок тоді, коли $\Delta \neq 0$, тобто $-9 - 2a \neq 0 \Leftrightarrow 2a \neq -9 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a \neq -\frac{9}{2} \Leftrightarrow a \in \left(-\infty; -\frac{9}{2} \right) \cup \left(-\frac{9}{2}; \infty \right).$$

Відповідь: $a \in \left(-\infty; -\frac{9}{2} \right) \cup \left(-\frac{9}{2}; \infty \right)$.

Приклад 5.

При яких значеннях параметра a система

$$\begin{cases} 3x-(a+1)y=4, \\ 6x-(3a-7)y=a-1 \end{cases}$$ має безліч розв'язків?

<u>Розв'язання.</u>

Знайдемо визначники даної системи :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -(a+1) \\ 6 & -(3a-7) \end{vmatrix} = -3(3a-7)+6(a+1)=27-3a;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & -(a+1) \\ a-1 & -(3a-7) \end{vmatrix} = -12a+28+a^2-1=a^2-12a+27;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & a-1 \end{vmatrix} = 3a-3-24=3a-27.$$

Дана система має безліч розв'язків тоді, коли $\Delta_x = \Delta_y = \Delta = 0$, тобто

$$27-3a=a^2-12a+27=3a-27=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 27-3a=0, \\ a^2-12a+27=0, \Leftrightarrow \\ 3a-27=0; \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=9, \\ (a-3)(a-9)=0, \Leftrightarrow a=9. \\ a=9; \end{cases}$$

<u>Відповідь:</u> $a=9$.

Приклад 6.

При яких значеннях параметра a система $\begin{cases} ax-6y=a+1, \\ 2x+3y=3 \end{cases}$ не має розв'язків?

<u>Розв'язання.</u>

Знайдемо визначники даної системи :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & -6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3a+12; \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} a+1 & -6 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 3a+3+18=3a+21;$$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & a+1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3a - 2a - 2 = a - 2$. Дана система не має розв'язків тоді, коли $\Delta = 0$ і при цьому $\Delta_x \neq 0$ або $\Delta_y \neq 0$. Оскільки $\Delta = 0$ при $a = -4$ і при $a = -4$ маємо: $\Delta_x = 9 \neq 0$ і $\Delta_y = -6 \neq 0$, то при $a = -4$ дана система не має розв'язків.

Відповідь: $a = -4$.

Приклад 7.

Знайти всі значення параметра a, при яких система рівнянь $\begin{cases} 4x - 3y - a = 0, \\ 5x - ay + 8 = 0 \end{cases}$ має єдиний розв'язок, який задовольняє одночасно умови $x < 0$ і $y < 0$.

Розв'язання.

Знайдемо визначники даної системи :

$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -a \end{vmatrix} = -4a + 15;$ $\qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} a & -3 \\ -8 & -a \end{vmatrix} = -a^2 - 24;$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 4 & a \\ 5 & -8 \end{vmatrix} = -32 - 5a$. Тоді дана система має єдиний розв'язок $\left(\dfrac{a^2 + 24}{4a - 15}; \dfrac{32 + 5a}{4a - 15} \right)$ при $\Delta \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \dfrac{15}{4}$. За умовою цей розв'язок задовольняє одночасно умови $x < 0$ і $y < 0$, тобто маємо $\begin{cases} \dfrac{a^2 + 24}{4a - 15} < 0, \\ \dfrac{32 + 5a}{4a - 15} < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a - 15 < 0, \\ 32 + 5a > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < \dfrac{15}{4}, \\ a > -\dfrac{32}{5}; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 3\dfrac{3}{4}, \\ a > -6\dfrac{2}{5}; \end{cases} \Leftrightarrow a \in (-6{,}4; 3{,}75).$$

Відповідь: $a \in (-6{,}4; 3{,}75)$.

Приклад 8.

При яких значеннях параметра p система рівнянь $\begin{cases} 3x + py = 3, \\ 2x - 4y = 1 \end{cases}$ має розв'язок, який задовольняє умови $x < 0$ і $y > 0$?

<u>Розв'язання.</u>

Знайдемо визначники даної системи :

$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & p \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -12 - 2p;$ $\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & p \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -12 - p;$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 6 = -3$.

Якщо $\Delta = 0 \Leftrightarrow -12 - 2p = 0 \Leftrightarrow p = -6$, то система несумісна, оскільки $\Delta_y = -3 \neq 0$.

Якщо $\Delta \neq 0 \Leftrightarrow p \neq -6$, то система має єдиний розв'язок $\left(\dfrac{12 + p}{12 + 2p}; \dfrac{3}{12 + 2p} \right)$. Оскільки за умовою $x < 0$ і $y > 0$, то маємо

$$\begin{cases} \dfrac{12 + p}{12 + 2p} < 0, \\ \dfrac{3}{12 + 2p} > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{12 + p}{12 + 2p} < 0, \\ 12 + 2p > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12 + p < 0, \\ 12 + 2p > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p < -12, \\ p > -6; \end{cases} \Leftrightarrow p \in \varnothing .$$

<u>Відповідь:</u> таких значень параметра p не існує.

Приклад 9.

Знайти всі значення a і b, при яких рівносильні системи рівнянь $\begin{cases} 2x + ay = b, \\ x + y = 1 \end{cases}$ і $\begin{cases} 2x + 3y = a - 2, \\ x + 2y = 1. \end{cases}$

Розв’язання.

Розглянемо систему $\begin{cases} 2x + ay = b, \\ x + y = 1 \end{cases}$ (1) : визначники даної системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - a; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} b & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = b - a; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - b.$$

Розглянемо систему $\begin{cases} 2x + 3y = a - 2, \\ x + 2y = 1 \end{cases}$ (2) та знайдемо визначники цієї системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} a-2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (a-2)\cdot 2 - 3\cdot 1 = 2a - 7;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & a-2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 1 - (a-2)\cdot 1 = 2 - a + 2 = 4 - a.$$

Оскільки визначник системи (2) $\Delta = 1 \neq 0$, то вона має єдиний розв’язок $(x_\circ; y_\circ)$, де $x_\circ = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = 2a - 7$ і $y_\circ = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = 4 - a.$ Тоді, згідно означення рівносильних систем, системи (1) та (2) рівносильні лише у тому випадку, коли система (1) сумісна і визначена, тобто визначник системи (1) $\Delta = 2 - a \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 2.$ При $a \neq 2$ система (1) має єдиний розв’язок $(x_\circ; y_\circ)$, де $x_\circ = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{b-a}{2-a}$ і $y_\circ = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = \dfrac{2-b}{2-a}.$ Тому системи (1) та (2) рівносильні тоді, коли

$$\begin{cases} \dfrac{b-a}{2-a} = 2a - 7, \\ \dfrac{2-b}{2-a} = 4 - a, \\ a \neq 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2-b}{2-a} = 4 - a, \\ \dfrac{b-a}{2-a} = 2a - 7, \\ a \neq 2; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-b-(4-a)(2-a)=0, \\ b-a-(2a-7)(2-a)=0, \\ a \neq 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-a^2+6a-6, \\ a^2-6a+8=0, \\ a \neq 2; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=-a^2+6a-6, \\ a=4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2, \\ a=4. \end{cases}$$

<u>Відповідь:</u> $a=4$ і $b=2$.

Приклад 10.

Числа a,b,c такі, що система рівнянь $\begin{cases} ax-by=2a+b, \\ (c+1)x+cy=10-a+3b \end{cases}$ має безліч розв'язків, причому $(1;3)$ – один із цих розв'язків. Знайти числа a,b,c.

<u>Розв'язання.</u>

Знайдемо визначники даної системи :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & -b \\ c+1 & c \end{vmatrix} = ac+b(c+1);$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2a+b & -b \\ 10-a+3b & c \end{vmatrix} = (2a+b)c+b(10-a+3b);$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & 2a+b \\ c+1 & 10-a+3b \end{vmatrix} = a(10-a+3b)-(2a+b)(c+1).$$

Дана система має безліч розв'язків тоді, коли $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$, тобто $ac+b(c+1)=(2a+b)c+b(10-a+$ $+3b)=a(10-a+3b)-(2a+b)(c+1)=0 \quad (*)$.

Оскільки (1;3) - розв'язок даної системи для шуканих чисел a,b,c, то для них маємо систему справедливих рівностей :

$$\begin{cases} a-3b=2a+b, \\ c+1+3c=10-a+3b; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-4b, \\ 4c=9-a+3b; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-4b, \\ 4c=9+7b; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -4b, \\ c = \dfrac{9+7b}{4}. \end{cases} \qquad \text{Тоді} \qquad (*) \Leftrightarrow (-4b)\cdot\frac{9+7b}{4} + b\left(\frac{9+7b}{4}+1\right) =$$

$$= (-8b+b)\cdot\frac{9+7b}{4} + b(10+4b+3b) = -4b(10+4b+3b) -$$

$$-(-8b+b)\left(\frac{9+7b}{4}+1\right) = 0 \Leftrightarrow -9b-7b^2 + b\cdot\frac{13+7b}{4} =$$

$$= -7b\cdot\frac{9+7b}{4} + b(10+7b) = -4b(10+7b) + 7b\cdot\frac{13+7b}{4} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -9b-7b^2 + \frac{13}{4}b + \frac{7}{4}b^2 = -\frac{63}{4}b - \frac{49}{4}b^2 + 10b + 7b^2 =$$

$$= -40b - 28b^2 + \frac{91}{4}b + \frac{49}{4}b^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -21b^2 - 23b = -21b^2 - 23b = -63b^2 - 69b = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 21b^2 + 23b = 63b^2 + 69b = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b(21b+23) = 0, \\ 3b(21b+23) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b(21b+23) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0, \\ b = -\dfrac{23}{21} = -1\dfrac{2}{21}. \end{array}\right.$$

Якщо $b = 0$, то відповідно $a = -4b = 0$ і $c = \dfrac{9+7b}{4} = \dfrac{9}{4} = 2\dfrac{1}{4}$.

Якщо $b = -1\dfrac{2}{21}$, то відповідно $a = -4b = \dfrac{92}{21} = 4\dfrac{8}{21}$ і

$$c = \frac{9+7b}{4} = \frac{9-\dfrac{23}{3}}{4} = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{3}.$$

<u>Відповідь:</u> $a = b = 0, c = 2\dfrac{1}{4}$ або $a = 4\dfrac{8}{21}, b = -1\dfrac{2}{21},\ c = \dfrac{1}{3}$.

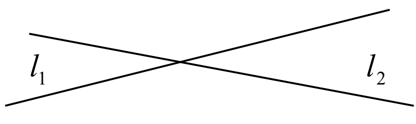
Геометрична інтерпретація розв'язку системи лінійних рівнянь з двома невідомими

Кожне з рівнянь системи $\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1, \\ a_2 x + b_2 y = c_2, \end{cases}$ при $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$ і $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$ задає лінійну відповідність між змінними x і y. Будь-яка лінійна відповідність між змінними x і y визначає в прямокутній системі координат XOY деяку пряму. Розв'язок цієї системи - це координати точки перетину прямих $l_1 : a_1 x + b_1 y = c_1$ та $l_2 : a_2 x + b_2 y = c_2$.

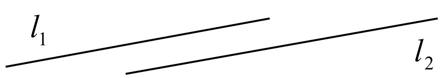
Нагадаємо, що рівняння прямої l_1 має вигляд: $y = -\dfrac{a_1}{b_1} x + \dfrac{c_1}{b_1}$ при $b_1 \neq 0$ або $y = k_1 x + d_1$ і рівняння прямої l_2 має вигляд: $y = -\dfrac{a_2}{b_2} x + \dfrac{c_2}{b_2}$ при $b_2 \neq 0$ або $y = k_2 x + d_2$, де d_1, d_2 - вільні члени, $k_1 = -\dfrac{a_1}{b_1}$ і $k_2 = -\dfrac{a_2}{b_2}$ - кутові коефіцієнти цих прямих.

Розглянемо випадки взаємного розташування прямих l_1 та l_2.

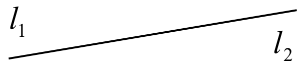
I. Прямі перетинаються і система має єдиний розв'язок, якщо кутові коефіцієнти прямих k_1 та k_2 різні, тобто $\dfrac{a_1}{b_1} \neq \dfrac{a_2}{b_2}$ або $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$.



II. Прямі паралельні і система несумісна, якщо $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$.



III. Прямі збігаються і система має безліч розв'язків, якщо $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$.



При цьому розв'язки системи можна представити у вигляді $\left(t;\frac{c_1-a_1 t}{b_1}\right)$, де $t\in R$ або $\left(\frac{c_1-b_1 t}{a_1};t\right)$, де $t\in R$.

Зауваження. Якщо мати мову не про прямі l_1 та l_2, а про систему рівнянь $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2, \end{cases}$ то інколи необхідно проводити дослідження і для випадків, коли одне з рівнянь перетворюється в тотожність або суперечливу рівність. Наприклад, система рівнянь $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ має безліч розв'язків також і у випадках, коли $a_2=b_2=c_2=0$ і $b_1\neq 0$ та $a_1=b_1=c_1=a_2=b_2=c_2=0$.

Приклад 1.

Знайти всі значення параметра a, при яких система $\begin{cases} 2x+(25a^2-2)y=5a, \\ x+y=1 \end{cases}$ не має розв'язків.

Розв'язання.

Згідно геометричної інтерпретації розв'язку системи лінійних рівнянь дана система не має розв'язків тоді, коли

$$\frac{2}{1}=\frac{25a^2-2}{1}\neq\frac{5a}{1}\Leftrightarrow\begin{cases} 25a^2-2=2, \\ 5a\neq 2; \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 25a^2=4, \\ a\neq\frac{2}{5}; \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} a=\pm\frac{2}{5}, \\ a\neq\frac{2}{5}; \end{cases}\Leftrightarrow a=-\frac{2}{5}.$$

Відповідь: $a=-\frac{2}{5}$.

Приклад 2.

Знайти всі значення параметра a, при яких система $\begin{cases} 2x+(a-1)y=3, \\ 4x+\left(a+\dfrac{1}{2}\right)y=2a+1 \end{cases}$ має безліч розв'язків.

Розв'язання.

Згідно геометричної інтерпретації розв'язку системи лінійних рівнянь має виконуватись умова:

$$\frac{2}{4}=\frac{a-1}{a+\frac{1}{2}}=\frac{3}{2a+1} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a-1}{a+\frac{1}{2}}=\dfrac{2}{4}, \\ \dfrac{3}{2a+1}=\dfrac{2}{4}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+1=4a-4, \\ 4a+2=12, \\ a\neq-\dfrac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a=5, \\ a\neq-\dfrac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{5}{2}, \\ a\neq-\dfrac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow a=\frac{5}{2}.$$

При $\left[\begin{array}{l} 2a+1=0, \\ a+\dfrac{1}{2}=0; \end{array}\right. \Leftrightarrow a=-\dfrac{1}{2}$ початкова система набуває вигляду $\begin{cases} x=0, \\ y=-2, \end{cases}$ тобто має єдиний розв'язок, що не задовольняє умову задачі.

Відповідь: $a=\dfrac{5}{2}$.

Приклад 3.Знайти всі значення параметра a, при яких система $\begin{cases} 2x+(a-1)y=3, \\ 4x+\left(a+\dfrac{1}{2}\right)y=2a+1 \end{cases}$ має єдиний розв'язок.

Розв'язання.

Згідно геометричної інтерпретації розв'язку системи лінійних рівнянь має виконуватись умова

$$\frac{2}{4} \neq \frac{a-1}{a+\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+1 \neq 4a-4, \\ a \neq -\dfrac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq \dfrac{5}{2}, \\ a \neq -\dfrac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2}; \infty\right).$$

При $a + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$ початкова система набуває вигляду $\begin{cases} x = 0, \\ y = -2, \end{cases}$ тобто теж має єдиний розв'зок.

Відповідь: $a \neq \frac{5}{2}$.

Приклад 4.

При яких значеннях a система $\begin{cases} 3x - (a+1)y = 4, \\ 6x - (3a-7)y = a-1 \end{cases}$ має безліч розв'язків і знайти ці розв'язки.

Розв'язання.

Згідно геометричної інтерпретації розв'язку системи лінійних рівнянь дана система має безліч розв'язків тоді, коли виконується умова $\frac{3}{6} = \frac{-(a+1)}{-(3a-7)} = \frac{4}{a-1} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a+1}{3a-7} = \dfrac{3}{6}, \\ \dfrac{4}{a-1} = \dfrac{3}{6}; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6a+6 = 9a-21, \\ 3a-3 = 24, \\ a \neq \dfrac{7}{3}, \\ a \neq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 27, \\ a \neq \dfrac{7}{3}, \\ a \neq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 9, \\ a \neq \dfrac{7}{3}, \\ a \neq 1; \end{cases} \Leftrightarrow a = 9.$$

При $a = 1$ або $a = \frac{7}{3}$ система не може мати безліч розв'язків.

При $a = 9$ дана система має вигляд:

$$\begin{cases} 3x - 10y = 4, \\ 6x - 20y = 8; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 10y = 4, \\ 3x - 10y = 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \mathrm{t}, \\ y = \dfrac{3\mathrm{t} - 4}{10}, \end{cases} \text{ де } \mathrm{t} \in R.$$

Відповідь: при $a = 9$ система має безліч розв'язків $\left(\mathrm{t}; \dfrac{3\mathrm{t} - 4}{10}\right)$, де $\mathrm{t} \in R$.

Приклад 5.

При яких значеннях a прямі $2x + ay = 1$ та $3x + y = 2$ паралельні ?

Розв'язання.

Згідно геометричної інтерпретації розв'язку системи лінійних рівнянь дані прямі паралельні тоді, коли $\dfrac{2}{3} = \dfrac{a}{1} \neq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow a = \dfrac{2}{3}$.

Відповідь: $a = \dfrac{2}{3}$.

Приклад 6.

При яких значеннях параметра a прямі $y = -4x + a$ і $y = 2x - 3$ перетинаються на осі ординат ?

Розв'язання.

Згідно умови задачі, необхідно знайти значення параметра a, при яких система рівнянь $\begin{cases} y = -4x + a, \\ y = 2x - 3 \end{cases}$ має розв'язок, абсциса якого дорівнює нулю. Тобто маємо

$$\begin{cases} y = -4x + a, \\ y = 2x - 3, \\ x = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = a, \\ y = -3, \\ x = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3, \\ x = 0, \\ y = -3. \end{cases} \quad \text{Отже, } a = -3.$$

Відповідь: $a = -3$.

Приклад 7.

При яких значеннях a і b прямі $3x - y + b = 0$ і

$ax-2y-10=0$ перетинаються в точці (2;-1) ?

Розв'язання.

Дані прямі перетинаються тоді, коли $\frac{a}{3} \neq \frac{2}{1} \Leftrightarrow a \neq 6$. Згідно умови задачі необхідно знайти значення параметрів a і b, при яких система рівнянь $\begin{cases} 3x-y+b=0, \\ ax-2y-10=0 \end{cases}$ має розв'язок (2;-1) і при цьому $a \neq 6$. Тому підставивши в систему $x=2$ і $y=-1$ та врахувавши $a \neq 6$ одержемо:

$$\begin{cases} 3\cdot 2+1+b=0, \\ a\cdot 2+2-10=0, \\ a \neq 6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-7, \\ a=4, \\ a \neq 6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-7, \\ a=4. \end{cases}$$

Відповідь: $a=4$ і $b=-7$.

Приклад 8.

Визначити, при яких значеннях a і b система рівнянь $\begin{cases} 5x-(a+1)y=3b, \\ x-2y=3 \end{cases}$ має безліч розв'язків.

Розв'язання.

Згідно геометричної інтерпретації розв'язку системи лінійних рівнянь дана система має безліч розв'язків тоді, коли

$$\frac{5}{1}=\frac{-(a+1)}{-2}=\frac{3b}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} a+1=10, \\ b=5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=9, \\ b=5. \end{cases}$$

Відповідь: $a=9$ і $b=5$.

Приклад 9.

Знайти всі значення параметра a, при яких точка $M(x_\circ;y_\circ)$ перетину прямих $5x+4y=6$ і $ax+6y=10$ задовольняє умови $x_\circ>0$ та $y_\circ<1$.

Розв'язання.

Розглянемо систему рівнянь $\begin{cases} 5x+4y=6, \\ ax+6y=10. \end{cases}$

Згідно геометричної інтерпретації розв'язку системи лінійних рівнянь дані прямі перетинаються тоді, коли $\frac{a}{5} \neq \frac{6}{4} \Leftrightarrow a \neq \frac{15}{2}$. Знайдемо визначники даної системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ a & 6 \end{vmatrix} = 30 - 4a; \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 10 & 6 \end{vmatrix} = 36 - 40 = -4;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ a & 10 \end{vmatrix} = 50 - 6a.$$

При $a \neq \frac{15}{2}$ дана система має єдиний розв'язок $(x_\circ; y_\circ)$, де $x_\circ = \frac{-4}{30-4a} = \frac{2}{2a-15}$ і $y_\circ = \frac{50-6a}{30-4a} = \frac{3a-25}{2a-15}$, який і є точкою перетину прямих $5x + 4y = 6$ і $ax + 6y = 10$. Оскільки за умовою $x_\circ > 0$ та $y_\circ < 1$, то маємо

$$\begin{cases} \frac{2}{2a-15} > 0, \\ \frac{3a-25}{2a-15} < 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 15 > 0, \\ \frac{3a - 25 - 2a + 15}{2a-15} < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > \frac{15}{2}, \\ a - 10 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 7{,}5, \\ a < 10; \end{cases} \Leftrightarrow a \in (7{,}5;10).$$

Відповідь: $a \in (7{,}5;10)$.

Приклад 10.

Числа a, b, c такі, що система рівнянь $\begin{cases} ax - by = 2a + b, \\ (c+1)x + cy = 10 - a + 3b \end{cases}$ має безліч розв'язків, причому (1;3)- один із цих розв'язків. Знайти числа a, b, c.

Розв'язання.

Згідно геометричної інтерпретації розв'язку системи лінійних рівнянь дана система має безліч розв'язків тоді, коли

$\frac{a}{c+1}=\frac{-b}{c}=\frac{2a+b}{10-a+3b}$. Оскільки (1;3) - розв’язок даної системи для шуканих чисел a,b,c, то для них маємо систему справедливих рівностей $\begin{cases} a-3b=2a+b, \\ c+1+3c=10-a+3b; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-4b, \\ 4c=9-a+3b; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-4b, \\ 4c=9+7b; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-4b, \\ c=\frac{9+7b}{4}. \end{cases}$ Тоді

$$\frac{a}{c+1}=\frac{-b}{c}=\frac{2a+b}{10-a+3b} \Leftrightarrow \frac{-4b}{\frac{9+7b}{4}+1}=\frac{-b}{\frac{9+7b}{4}}=\frac{-8b+b}{10+4b+3b} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-16b}{13+7b}=\frac{-4b}{9+7b}=\frac{-7b}{10+7b} \Leftrightarrow \frac{16b}{13+7b}=\frac{4b}{9+7b}=\frac{7b}{10+7b} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{16b}{13+7b}=\frac{4b}{9+7b}, \\ \frac{4b}{9+7b}=\frac{7b}{10+7b}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16b(9+7b)=4b(13+7b), \\ 4b(10+7b)=7b(9+7b), \\ b\neq -\frac{13}{7}, \\ b\neq -\frac{9}{7}, \\ b\neq -\frac{10}{7}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4b(9+7b)=b(13+7b), \\ 4b(10+7b)=7b(9+7b), \\ b\neq -1\frac{6}{7}, \\ b\neq -1\frac{2}{7}, \\ b\neq -1\frac{3}{7}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 36b+28b^2-13b-7b^2=0, \\ 40b+28b^2-63b-49b^2=0, \\ b\neq -1\frac{6}{7}, \\ b\neq -1\frac{2}{7}, \\ b\neq -1\frac{3}{7}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 21b^2+23b=0, \\ 21b^2+23b=0, \\ b\neq -1\frac{6}{7}, \\ b\neq -1\frac{2}{7}, \\ b\neq -1\frac{3}{7}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b(21b+23)=0, \\ b\neq -1\frac{6}{7}, \\ b\neq -1\frac{2}{7}, \\ b\neq -1\frac{3}{7}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} b=0, \\ b=-1\frac{2}{21}, \end{array}\right. \\ b\neq -1\frac{6}{7}, \\ b\neq -1\frac{2}{7}, \\ b\neq -1\frac{3}{7}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0, \\ b=-1\frac{2}{21}. \end{array}\right.$$

Якщо $b=0$, то відповідно $a=-4b=0$ і $c=\frac{9+7b}{4}=2\frac{1}{4}$.

Якщо $b=-1\frac{2}{21}$, то відповідно $a=-4b=\frac{92}{21}=4\frac{8}{21}$ і $c=\frac{9+7b}{4}=\frac{1}{3}$.

Зауважимо, що випадок $c+1=c=10-a+3b=0$ немає потреби розглядати, оскільки $c\neq c+1$ при жодному $c\in R$.

Відповідь: $a=b=0, c=2\frac{1}{4}$ або $a=4\frac{8}{21}, b=-1\frac{2}{21}, c=\frac{1}{3}$.

Вправи для практичних занять та самостійного розв'язування

1. Розв'язати системи рівнянь:

а) $\begin{cases} 2x+3y=11, \\ 3x+2y=9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x-4y=1, \\ 3x+4y=18; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 4x-y=3, \\ 5x+2y=4; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 3x+2y=6, \\ x-2y=4; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x+y=1, \\ 3x+3y=6; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x-y=5, \\ 3x-3y=2; \end{cases}$

є) $\begin{cases} 3x-2y=7, \\ 2x+5y=3; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} 2x+5y=2, \\ 6x+15y=5. \end{cases}$

Відповідь: а) $\{(1;3)\}$; б) $\left\{\left(\frac{19}{3};\frac{17}{8}\right)\right\}$; в) $\left\{\left(\frac{10}{13};\frac{1}{13}\right)\right\}$;

г) $\left\{\left(2\frac{1}{2};-\frac{3}{4}\right)\right\}$; д) система несумісна; е) система несумісна;

є) $\left\{\left(2\frac{3}{19};-\frac{5}{19}\right)\right\}$; ж) система несумісна.

2. Розв'язати системи рівнянь:

а) $\begin{cases} x-2y=3, \\ 2x-4y=6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x-y=1, \\ 12x-4y=4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+2y=3, \\ 4x+8y=12; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x-14y=8, \\ 3x-21y=12. \end{cases}$

Відповідь: системи мають безліч розв'язків виду:

а) $\left(\mathrm{t};\frac{1}{2}(\mathrm{t}-3)\right)$, де $\mathrm{t}\in R$; б) $(\mathrm{t};3\mathrm{t}-1)$, де $\mathrm{t}\in R$;

в) $(3-2\mathrm{t};\mathrm{t})$, де $\mathrm{t}\in R$; г) $(4+7\mathrm{t};\mathrm{t})$, де $\mathrm{t}\in R$.

3. При кожному дійсному значенні параметра m розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} mx+y=2, \\ x+y=2m. \end{cases}$

Відповідь: при $m\in(-\infty;1)\cup(1;\infty)$ система має єдиний розв'язок (-2;2m+2); при m=1 система має безліч розв'язків виду (t;2-t), де t $\in$ R.

4. Дослідити і розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 2x-ay=4, \\ x+2y=a. \end{cases}$

Відповідь: при $a\in(-\infty;-4)\cup(-4;\infty)$ система має єдиний розв'язок $\left(\frac{a^2+8}{a+4};\frac{2(a-2)}{a+4}\right)$; при $a=-4$ система несумісна.

5. Дослідити і розв'язати систему рівнянь $\begin{cases}(a-1)^2 x+(a^2-1)y=(a+1)^2,\\ (2a-1)x+(a+1)y=a^2-1.\end{cases}$

<u>Відповідь</u>: при $a\in(-\infty;-1)\cup(-1;0)\cup(0;1)\cup(1;\infty)$ система має єдиний розв'язок $\left(\dfrac{a^2-2a-3}{a-1};-\dfrac{a^2-5a+2}{a-1}\right)$; при $a=-1$ система має безліч розв'язків виду $(0;t)$, де t ∈ R; при $a=0$ система має безліч розв'язків виду (t;t-1), де t ∈ R; при $a=1$ система несумісна.

6. Визначити кількість розв'язків системи $\begin{cases}(a+3)x+4y=5-3a,\\ 2x+(5+a)y=8\end{cases}$ в залежності від значень параметра a.

<u>Відповідь</u>: при $a\neq-7$ і $a\neq-1$ система має єдиний розв'язок; при $a=-7$ система не має розв'язків; при $a=-1$ система має безліч розв'язків.

7. Визначити, при яких значеннях p система рівнянь $\begin{cases}2px+2y=2p,\\ 2px+py=4\end{cases}$ має: а) єдиний розв'язок; б) безліч розв'язків; в) не має розв'язків.

<u>Відповідь</u>: а) при $p\in(-\infty;0)\cup(0;2)\cup(2;\infty)$; б) при $p=2$; в) при $p=0$.

8. Знайти всі значення параметра a, при яких система рівнянь $\begin{cases}3x+(a-1)y=12,\\ (a-1)x+12y=24\end{cases}$ має єдиний розв'язок і знайти цей розв'язок.

<u>Відповідь</u>: $\left(\dfrac{24}{a+5};\dfrac{12}{a+5}\right)$ при $a\in(-\infty;-5)\cup(-5;7)\bigcup(7;\infty)$.

9. Показати, що система рівнянь $\begin{cases}ax+(a-1)y=2a,\\ 3(a+2)x+(4a+1)y=a+5\end{cases}$ має єдиний розв'язок.

10. Визначити, при яких значеннях параметра b системи рівнянь мають єдиний розв'язок: а) $\begin{cases}(b-1)x+3y=b,\\ x+(b+1)y=2;\end{cases}$

б) $\begin{cases}(b-1)x+2by=-2,\\ 2bx+(b-1)y=b-1;\end{cases}$ в) $\begin{cases}(2b-3)x-by=3b-2,\\ 5x-(2b+3)y=5.\end{cases}$

<u>Відповідь</u>: а) $b\in(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;\infty)$;

б) $b\in(-\infty;-1)\cup\left(-1;\dfrac{1}{3}\right)\cup\left(\dfrac{1}{3};\infty\right)$;

в) $b\in(-\infty;-1)\cup\left(-1;\dfrac{9}{4}\right)\cup\left(\dfrac{9}{4};\infty\right)$.

11. Визначити, при яких значеннях параметра m системи рівнянь несумісні:

а) $\begin{cases}mx+y=m,\\ 2mx+my=4;\end{cases}$ б) $\begin{cases}(m-2)x+6y=15,\\ 3x+(2m-4)y=15;\end{cases}$ в) $\begin{cases}(3m-1)x-my=1,\\ 3x+2my=1;\end{cases}$

г) $\begin{cases}2x+my=5,\\ 4x+3y=12;\end{cases}$ д) $\begin{cases}2x+(9m^2-2)y=3m,\\ x+y=1.\end{cases}$

<u>Відповідь</u>: а) $m=0$; б) $m=-1$; в) $m=-\dfrac{1}{6}$; г) $m=\dfrac{3}{2}$;

д) $m=-\dfrac{2}{3}$.

12. Визначити, при яких значеннях параметра p системи рівнянь мають безліч розв'язків: а) $\begin{cases}2x+(p+5)y=8,\\ (p+3)x+4y=5-3p;\end{cases}$

б) $\begin{cases}(p+1)x+8y=4p,\\ px+(p+3)y=3p-1;\end{cases}$ в) $\begin{cases}px+y=p,\\ 2px+py=4;\end{cases}$

г) $\begin{cases}px+y=p^2,\\ x+py=1;\end{cases}$ д) $\begin{cases}(p+4)x+3y=p+1,\\ px+(p-1)y=p-1.\end{cases}$

<u>Відповідь</u>: а) $p=-1$; б) $p=1$; в) $p=2$; г) $p=1$; д) $p=2$.

13. При яких значеннях параметра a прямі $2x + y = 1$ та $3ax - 2y = 4$ перетинаються ?

Відповідь: $a \neq -\frac{4}{3}$.

14. При яких значеннях параметра b прямі $y = 3x + 1$ та $y = 2bx - 3$ паралельні ?

Відповідь: $b = \frac{3}{2}$.

15. При яких значеннях k прямі $2x + y = 9$ і $kx + 5y = 18$ перетинаються в точці, яка лежить на бісектрисі першого координатного кута ?

Відповідь: $k = 1$.

16. При яких значеннях a система рівнянь $\begin{cases} 3x + ay = 3, \\ 2x - 4y = 1 \end{cases}$ має розв’язок, який задовольняє умови $x < 0$ і $y < 0$?

Відповідь: $a \in (-12; -6)$.

17. При яких значеннях a система рівнянь $\begin{cases} 3x - y = 1 - a, \\ x + y = 2a + 1 \end{cases}$ має розв’язок, який задовольняє умови $x \geq 1$ і $y \leq 4$?

Відповідь: $a = 2$.

18. Визначити, при яких значеннях a всі розв’язки системи $\begin{cases} (a - 1)x + y = 2, \\ x + y = a \end{cases}$ задовольняють умови $x < 0$ і $y \geq 0$.

Відповідь: $a \in [-1; 2) \cup (2; \infty)$.

19. Знайти всі значення параметра a, при яких точка $M(x_\circ; y_\circ)$ перетину прямих $3x + y = -2$ і $x - (1 - a)y = 3$ задовольняє умови $x_\circ \leq 2$ і $y_\circ > 0$?

Відповідь: $a \in \left(\frac{4}{3};\infty\right)$.

20. При яких значеннях n існують розв'язки системи рівнянь $\begin{cases} x+ny=3, \\ nx+4y=6, \end{cases}$ які задовольняють одночасно нерівності $x>1$ і $y>0$?

Відповідь: $n \in (-2;4)$.

21. Визначити, при яких значеннях a і b система рівнянь $\begin{cases} 5x-(a+1)y=3b, \\ x-2y=3 \end{cases}$ не має розв'язків.

Відповідь: $a=9$ і $b \neq 5$.

22. При яких значеннях a і b система рівнянь $\begin{cases} ax+(b-1)y=2, \\ 3x+10y=-1 \end{cases}$ невизначена ?

Відповідь: $a=-6$ і $b=-19$.

23. Визначити, при яких значеннях α і β система рівнянь $\begin{cases} (\alpha+1)^2x-(\beta+1)y=-\alpha, \\ (\beta-1)x+(5-2\beta)y=\alpha+4 \end{cases}$ має єдиний розв'язок (1;1).

Відповідь: $\alpha=\beta=0$ або $\alpha=-4, \beta=4$.

24. При яких значеннях a і b прямі $3x-y+b=0$ і $ax-2y-10=0$ паралельні між собою ?

Відповідь: $a=6$ і $b \neq -5$.

25. Визначити, при яких $b \in R$ система рівнянь $\begin{cases} 3x+y=a, \\ ax-y=b \end{cases}$ має хоч би один розв'язок при довільних $a \in R$.

Відповідь: $b=3$.

26. Дослідити і розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} ax+y=b, \\ x+ay=b. \end{cases}$

Відповідь: при $a \in (-\infty;-1) \cup (-1;1) \cup (1;\infty)$ і довільному b система має єдиний розв'язок $\left(\dfrac{b}{a+1}; \dfrac{b}{a+1}\right)$; при $a=-1$ і $b=0$ система має безліч розв'язків виду (t;t), де $t \in R$; при $a=-1$ і $b \neq 0$ система несумісна; при $a=1$ і довільному b система має безліч розв'язків виду $(t; b-t)$, де $t \in R$.

27. Знайти всі значення параметрів a і b, при яких рівносильні системи рівнянь $\begin{cases} ax+2y=b+1, \\ x+y=3 \end{cases}$ і $\begin{cases} 2x+y=a^2+2, \\ x+3y=3. \end{cases}$

Відповідь: $a=-2$ і $b=-7$.

28. Числа a, b, c такі, що система рівнянь $\begin{cases} ax-by=2a-b, \\ (c+1)x+cy=10-a+3b \end{cases}$ має безліч розв'язків, причому (1;3)- один із цих розв'язків. Знайти числа a, b, c.

Відповідь: $a=b=0,\ c=2\dfrac{1}{4}$ або $a=2, b=-1, c=1$.

29. При яких значеннях a, b, c система рівнянь $\begin{cases} ax+2by=a-b, \\ (c-1)x+cy=2b-a \end{cases}$ має безліч розв'язків, якщо $(1;2)$ - один із цих розв'язків.

Відповідь: $a=b=0,\ c=\dfrac{1}{3}$ або $a=1, b=c=0.$

ТОЧНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ТРЬОМА НЕВІДОМИМИ

Розглянемо систему
$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3, \end{cases} \qquad (3)$$

де x, y, z - невідомі, a_{ij} - числові коефіцієнти, b_1, b_2, b_3 - вільні члени, $i = 1,2,3$ та $j = 1,2,3$.

Розв'язком такої системи називається упорядкована трійка $(x_\circ; y_\circ; z_\circ)$, при підстановці якої в систему кожне її рівняння перетворюється в тотожність.

Якщо всі $a_{ij} = b_1 = b_2 = b_3 = 0$ при $i = 1,2,3$ та $j = 1,2,3$, то будь-яка трійка чисел буде розв'язком даної системи.

Якщо виконується хоча б одна з умов $a_{ij} = 0$ і $b_1 \neq 0$ при $i = 1$, $j = 1,2,3$ або $a_{ij} = 0$ і $b_2 \neq 0$ при $i = 2$, $j = 1,2,3$, або $a_{ij} = 0$ і $b_3 \neq 0$ при $i = 3$, $j = 1,2,3$, то система несумісна.

Якщо $a_{ij} = b_1 = b_2 = 0$ і $a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 \neq 0$ при $i = 1,2$, $j = 1,2,3$ або $a_{ij} = b_1 = b_3 = 0$ і $a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 \neq 0$ при $i = 1,3$, $j = 1,2,3$, або $a_{ij} = b_2 = b_3 = 0$ і $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 \neq 0$ при $i = 2,3$, $j = 1,2,3$, то система має безліч розв'язків.

Якщо $a_{11} = a_{12} = a_{13} = b_1 = 0$ і $a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 \neq 0$, $a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 \neq 0$ або $a_{21} = a_{22} = a_{23} = b_2 = 0$ і $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 \neq 0$, $a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 \neq 0$ або $a_{31} = a_{32} = a_{33} = b_3 = 0$ і $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 \neq 0$, $a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 \neq 0$, то система теж може мати безліч розв'язків.

Розглянемо випадок, коли $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 \neq 0$, $a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 \neq 0$ і $a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 \neq 0$. Якщо хоча б два рівняння системи (3) являються несумісними, то й система несумісна. Якщо ж сумісна система містить два однакові рівняння, то вона має безліч розв'язків.

Метод підстановки

Розглянемо метод підстановки для трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими на прикладі для випадку, коли розв'язок системи єдиний.

Приклад 1.

Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x - y + 3z = 9, \\ 3x - 5y + z = -4, \\ 4x - 7y + z = 5. \end{cases}$

<u>Розв'язання</u>.

Із першого рівняння визначимо $y = x + 3z - 9$ і підставимо цей вираз у друге і третє рівняння:

$$\begin{cases} x - y + 3z = 9, \\ 3x - 5y + z = -4, \\ 4x - 7y + z = 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 3z - 9, \\ 3x - 5(x + 3z - 9) + z = -4, \\ 4x - 7(x + 3z - 9) + z = 5; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 3z - 9, \\ 2x + 14z = 49, \\ 3x + 20z = 58. \end{cases}$ Із другого рівняння одержаної системи

визначимо $x = \dfrac{49 - 14z}{2}$ і підставимо в третє рівняння:

$$\begin{cases} y = x + 3z - 9, \\ 2x + 14z = 49, \\ 3x + 20z = 58; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 3z - 9, \\ x = \dfrac{49 - 14z}{2}, \\ 3 \cdot \dfrac{49 - 14z}{2} + 20z = 58; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 3z - 9, \\ x = \dfrac{49 - 14z}{2}, \\ z = \dfrac{31}{2}. \end{cases}$$

Тоді одержане значення $z=\frac{31}{2}$ підставимо в друге рівняння системи для знаходження x:

$$\begin{cases} y=z+3z-9, \\ x=\dfrac{49-14z}{2}, \\ z=\dfrac{31}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x+3z-9, \\ x=\dfrac{49-14\cdot\dfrac{31}{2}}{2}, \\ z=\dfrac{31}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x+3z-9, \\ x=-84, \\ z=\dfrac{31}{2}. \end{cases}$$

Одержані значення $x=-84$ та $z=\frac{31}{2}$ підставимо в перше рівняння останньої системи для визначення y:

$$\begin{cases} y=x+3z-9, \\ x=-84, \\ z=\dfrac{31}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-84+3\cdot\dfrac{31}{2}-9, \\ x=-84, \\ z=\dfrac{31}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\dfrac{93}{2}, \\ x=-84, \\ z=\dfrac{31}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-84, \\ y=-\dfrac{93}{2}, \\ z=\dfrac{31}{2}. \end{cases}$$

<u>Відповідь</u>: $\{(x;y;z)\}=\left\{\left(-84;-\dfrac{93}{2};\dfrac{31}{2}\right)\right\}.$

Метод виключення невідомих

При цьому методі, комбінуючи деяким чином рівняння системи, виключають одне із невідомих у всіх рівняннях, крім одного. Аналогічно виключають друге невідоме і в результаті одержують систему з визначеним уже одним з невідомих, за яким знаходять дві інші невідомі. При цьому час, витрачений на одержання розв'язку за методом виключення, буде залежати від організації обчислень.

Продемонструємо метод виключення невідомих на попередньому прикладі.

Приклад 1.

Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x - y + 3z = 9, \\ 3x - 5y + z = -4, \\ 4x - 7y + z = 5. \end{cases}$

Розв'язання.

Домножимо друге рівняння системи на (-1) і додамо його до третього рівняння, а результат запишемо замість третього рівняння даної системи. Аналогічно домножимо друге рівняння системи на (-3) і додамо до першого рівняння системи, а результат запишемо замість другого рівняння даної системи.

Тоді маємо: $$\begin{cases} x - y + 3z = 9, \\ 3x - 5y + z = -4, \\ 4x - 7y + z = 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 3z = 9, \\ -8x + 14y = 21, \\ x - 2y = 9. \end{cases}$$

Третє рівняння одержаної системи домножимо на 8 і додамо його до другого рівняння, а результат запишемо замість другого рівняння:

$$\begin{cases} x - y + 3z = 9, \\ -8x + 14y = 21, \\ x - 2y = 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 3z = 9, \\ -2y = 93, \\ x - 2y = 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 3z = 9, \\ y = -\dfrac{93}{2}, \\ x - 2y = 9. \end{cases}$$

Тоді одержане значення $y = -\dfrac{93}{2}$ підставимо в третє рівняння системи для знаходження x:

$$\begin{cases} x - y + 3z = 9, \\ y = -\dfrac{93}{2}, \\ x - 2y = 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 3z = 9, \\ y = -\dfrac{93}{2}, \\ x = 9 + 2y; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x-y+3z=9, \\ y=-\dfrac{93}{2}, \\ x=9+2\cdot\left(-\dfrac{93}{2}\right); \end{cases} \quad \Leftrightarrow\begin{cases} x-y+3z=9, \\ y=-\dfrac{93}{2}, \\ x=-84. \end{cases}$$

А одержані значення $x=-84$ та $y=-\dfrac{93}{2}$ підставимо в перше рівняння останньої системи для знаходження z:

$$\begin{cases} x-y+3z=9, \\ y=-\dfrac{93}{2}, \\ x=-84; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=\dfrac{9-x+y}{3}, \\ y=-\dfrac{93}{2}, \\ x=-84; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=\dfrac{9+84-\dfrac{93}{2}}{3}, \\ y=-\dfrac{93}{2}, \\ x=-84; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} z=\dfrac{31}{2}, \\ y=-\dfrac{93}{2}, \\ x=-84; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-84, \\ y=-\dfrac{93}{2}, \\ z=\dfrac{31}{2}. \end{cases}$$

Відповідь: $\{(x;y;z)\}=\left\{\left(-84;-\dfrac{93}{2};\dfrac{31}{2}\right)\right\}$.

Приклад 2.

Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x+3y-4z=-21, \\ 2x-3y-2z=6, \\ 3x+3y-8z=-31. \end{cases}$

Розв'язання.

Додамо перше рівняння системи до другого рівняння і результат запишемо замість другого рівняння системи, а третє рівняння системи додамо до першого рівняння, помноженого на (-1) і результат додавання запишемо замість третього рівняння даної системи:

$$\begin{cases} x+3y-4z=-21, \\ 2x-3y-2z=6, \\ 3x+3y-8z=-31; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y-4z=-21, \\ 3x-6z=-15, \\ -2x+4z=10; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y-4z=-21, \\ x-2z=-5, \\ -x+2z=5. \end{cases}$$

Оскільки друге та третє рівняння одержаної сумісної системи є одне і теж рівняння, то система має безліч розв'язків. Дійсно, додавши друге і третє рівняння системи, одержимо:

$$(1-1)x+(-2+2)z=-5+5 \Leftrightarrow 0\cdot x+0\cdot z=0 \Leftrightarrow 0\cdot z=0 \Leftrightarrow z\in R.$$

А з першого і другого рівняння останньої системи знайдемо зв'язок невідомих x та y із невідомою z. Отже,

$$\begin{cases} x+3y-4z=-21, \\ x-2z=-5, \\ -x+2z=5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y-4z=-21, \\ x-2z=-5, \\ 0\cdot x+0\cdot z=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y-4z=-21, \\ x-2z=-5, \\ 0\cdot z=0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{-21-x+4z}{3}, \\ x=2z-5, \\ z=\mathrm{t},\ \text{де}\ \mathrm{t}\in R; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{-21-2\mathrm{t}+5+4\mathrm{t}}{3}, \\ x=2\mathrm{t}-5, \\ \mathrm{z}=\mathrm{t},\ \text{де}\ \mathrm{t}\in R; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{1}{3}(2\mathrm{t}-16), \\ x=2\mathrm{t}-5, \\ \mathrm{z}=\mathrm{t},\ \text{де}\ \mathrm{t}\in \mathrm{R}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2\mathrm{t}-5, \\ y=\dfrac{2}{3}(\mathrm{t}-8), \\ z=\mathrm{t},\ \text{де}\ \mathrm{t}\in \mathrm{R}. \end{cases}$$

Відповідь: система має безліч розв'язків виду $\left(2\mathrm{t}-5; \dfrac{2}{3}(\mathrm{t}-8); \mathrm{t}\right)$, де $\mathrm{t}\in\mathrm{R}$.

Приклад 3.

Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0, \\ 2x + y + 3z = 0, \\ x + y + 2z = 0. \end{cases}$

<u>Розв'язання</u>.

Оскільки маємо систему однорідних рівнянь, то (0;0;0) є її розв'язком.

Додамо перше рівняння системи до другого рівняння і результат запишемо замість другого рівняння системи:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0, \\ 2x + y + 3z = 0, \\ x + y + 2z = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 0, \\ 3x + 3y + 6z = 0, \\ x + y + 2z = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 0, \\ x + y + 2z = 0, \\ x + y + 2z = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x + y + 2z) + (y + z) = 0, \\ x + y + 2z = 0, \\ x + y + 2z = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + z = 0, \\ (x + z) + (y + z) = 0, \\ (x + z) + (y + z) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y + z = 0, \\ x + z = 0, \\ x + z = 0. \end{cases}$$

Оскільки друге та третє рівняння одержаної сумісної системи однакові, то система має безліч розв'язків. Дійсно, додавши друге рівняння системи до третього рівняння, помноженого на (-1), одержимо: $0 \cdot z = 0 \Leftrightarrow z = \mathrm{t}$, де $\mathrm{t} \in R$.

Отже, $\begin{cases} y + z = 0, \\ x + z = 0, \\ x + z = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + z = 0, \\ x + z = 0, \\ 0 \cdot z = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z, \\ y = -z, \\ z = \mathrm{t}, \text{ де } \mathrm{t} \in \mathrm{R}; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\mathrm{t}, \\ y = -\mathrm{t}, \\ z = \mathrm{t}, \text{ де } \mathrm{t} \in R. \end{cases}$$

Відповідь: система має безліч розв'язків виду $(-t;-t;t)$, де $t \in R$.

В системах виду $\begin{cases} ax + y + z = b_1, \\ x + ay = z = b_2, \\ x + y + az = b_3, \end{cases}$ де a, b_1, b_2, b_3 - деякі дійсні числа, зручно виключати невідомі таким методом: додаємо всі рівняння системи і одержуємо $(a+2)x + (a+2)y + (a+2)z = b_1 + b_2 + b_3$ $(*)$. Звідки $x + y + z = \dfrac{b_1 + b_2 + b_3}{a+2}$ при $a \neq -2$, після чого від кожного рівняння даної системи віднімаємо рівняння $(*)$ і цим самим відразу визначаємо невідомі x, y та z. Доречі, при $a = -2$ рівняння $(*)$ набуває вигляду $0 \cdot (x + y + z) = b_1 + b_2 + b_3$, яке не має розв'язків при $b_1 + b_2 + b_3 \neq 0$ і має безліч розв'язків при $b_1 + b_2 + b_3 = 0$.

Приклад 4.

Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 3x + y + z = 6, \\ x + 3y + z = 9, \\ x + y + 3z = 10. \end{cases}$

Розв'язання.

Додамо всі три ріняння даної системи:
$5x + 5y + 5z = 25 \Leftrightarrow 5(x + y + z) = 25 \Leftrightarrow x + y + z = 5 \quad (*)$.

Тепер від кожного рівняння даної системи віднімемо одержане рівняння $(*)$, тобто маємо:

$$\begin{cases} 3x + y + z = 6, \\ x + 3y + z = 9, \\ x + y + 3z = 10; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 6 - 5, \\ 2y = 9 - 5, \\ 2z = 10 - 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}, \\ y = 2, \\ z = \dfrac{5}{2}. \end{cases}$$

Відповідь: $\{(x;y;z)\} = \left\{\left(\frac{1}{2};2;\frac{5}{2}\right)\right\}$.

Продемонструємо даний метод виключення невідомих і для систем чотирьох лінійних рівнянь з чотирма невідомими.

Приклад 5.

Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x+y+z=6, \\ y+z+\mathrm{t}=9, \\ x+z+\mathrm{t}=8, \\ x+y+\mathrm{t}=7. \end{cases}$

Розв'язання.

Додамо всі чотири рівняння даної системи:

$$\left.\begin{array}{l} 3x+3y+3z+3\mathrm{t}=30 \Leftrightarrow 3(x+y+z+\mathrm{t})=30 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x+y+z+\mathrm{t}=10 \end{array}\right. \quad (*).$$

Тепер від кожного рівняння даної системи віднімемо одержане рівняння $(*)$, тобто маємо:

$$\begin{cases} x+y+z=6, \\ y+z+\mathrm{t}=9, \\ x+z+\mathrm{t}=8, \\ x+y+\mathrm{t}=7; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\mathrm{t}=6-10, \\ -x=9-10, \\ -y=8-10, \\ -z=7-10; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{t}=4, \\ x=1, \\ y=2, \\ z=3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ y=2, \\ z=3, \\ \mathrm{t}=4. \end{cases}$$

Відповідь: $\{(x;y;z;\mathrm{t})\} = \{(1;2;3;4)\}$.

Метод Гаусса

Цей метод є частинним випадком метода виключення невідомих. Якщо в першому рівнянні системи коефіцієнт при невідомій x дорівнює нулю, то це рівняння слід поміняти місцями з рівнянням системи, в якому коефіцієнт при невідомій x відмінний від нуля.

Зауважимо, що кожне рівняння системи обов'язково записуємо таким чином, щоб коефіцієнти при невідомих стояли один під одним, тобто коефіцієнти при невідомій x

були під коефіцієнтами при x, коефіцієнти при невідомій y під коефіцієнтами при y і т. д.

При цьому методі виключаємо невідому x у всіх рівняннях, крім вибраного першого рівняння. Аналогічно виключаємо невідому y і в результаті одержимо трикутну систему рівнянь (або ще називають діагональну), розв'язання якої не викликає ніяких затруднень. Сам процес виключення невідомих – це прямий хід метода, а розв'язування трикутної системи лінійних рівнянь – обернений хід.

Слід пам'ятати, існує багато різних схем Гаусса, які мають ті чи інші переваги. Наведемо одну з таких схем на прикладах лінійних рівнянь з трьома невідомими.

Приклад 1.

Розв'язати систему лінійних рівнянь $\begin{cases} 2x + 7y + 13z = 0, \\ 3x + 14y + 12z = 18, \\ 5x + 25y + 16z = 39. \end{cases}$

<u>Розв'язання</u>.

За перше рівняння виберемо перше рівняння даної системи і поділимо всі його коефіцієнти на коефіцієнт при x, який не дорівнює нулю:

$$\begin{cases} 2x + 7y = 13z = 0, \\ 3x + 14y + 12z = 18, \\ 5x + 25y + 16z = 39; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \dfrac{7}{2}y + \dfrac{13}{2}z = 0, \\ 3x + 14y + 12z = 18, \\ 5x + 25y + 16z = 39. \end{cases}$$

До другого рівняння одержаної системи додамо перше рівняння, домножене на (-3) і результат додавання запишемо замість другого рівняння системи, а до третього рівняння додамо перше рівняння, домножене на (-5) і результат додавання запишемо замість третього рівняння:

$$\begin{cases} x+\dfrac{7}{2}y+\dfrac{13}{2}z=0, \\ 3x+14y\;\;+12z=18, \\ 5x+25y\;\;+16z=39; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\;\;+\dfrac{7}{2}y+\dfrac{13}{2}z=0, \\ 0\;\;+\dfrac{7}{2}y-\dfrac{15}{2}z=18, \\ 0+\dfrac{15}{2}y-\dfrac{33}{2}z=39; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{7}{2}y+\dfrac{13}{2}z=0, \\ \quad\dfrac{7}{2}y-\dfrac{15}{2}z=18, \\ \quad\dfrac{15}{2}y-\dfrac{33}{2}z=39. \end{cases}$$

Далі у другому рівнянні всі члени поділимо на коефіцієнт при y, тобто на $\dfrac{7}{2}$:

$$\begin{cases} x+\dfrac{7}{2}y+\dfrac{13}{2}z=0, \\ \quad\dfrac{7}{2}y-\dfrac{15}{2}z=18, \\ \dfrac{15}{2}y-\dfrac{33}{2}z=39; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{7}{2}y+\dfrac{13}{2}z=0, \\ \qquad y-\dfrac{15}{7}z=\dfrac{36}{7}, \\ \quad\dfrac{15}{2}y-\dfrac{33}{2}z=39. \end{cases}$$

Друге рівняння системи домножимо на $\left(-\dfrac{15}{2}\right)$ і додамо до третього рівняння, а результат запишемо замість третього рівняння:

$$\begin{cases} x+\dfrac{7}{2}y+\dfrac{13}{2}z=0, \\ \qquad y-\dfrac{15}{7}z=\dfrac{36}{7}, \\ \quad\dfrac{15}{2}y-\dfrac{33}{2}z=39; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{7}{2}y+\dfrac{13}{2}z=0, \\ \qquad y\;\;-\dfrac{15}{7}z=\dfrac{36}{7}, \\ \qquad 0\;\;-\dfrac{3}{7}z=\dfrac{3}{7}. \end{cases}$$

Тоді маємо трикутну систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x + \dfrac{7}{2}y + \dfrac{13}{2}z = 0, \\ \qquad y - \dfrac{15}{7}z = \dfrac{36}{7}, \\ \qquad\qquad z = -1. \end{cases}$$

Тепер зробимо обернений хід, тобто по знайденому значенню z із другого рівняння знайдемо y і по знайденим значенням y і z із першого рівняння знайдемо x:

$$\begin{cases} x+\dfrac{7}{2}y+\dfrac{13}{2}z=0, \\ \quad y-\dfrac{15}{7}z=\dfrac{36}{7}, \\ \qquad z=-1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{7}{2}y+\dfrac{13}{2}z=0, \\ \quad y=\dfrac{36}{7}+\dfrac{15}{7}\cdot(-1), \\ \qquad z=-1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{7}{2}y-\dfrac{13}{2}z, \\ \quad y=3, \\ \quad z=-1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{7}{2}\cdot 3-\dfrac{13}{2}\cdot(-1), \\ \quad y=3, \\ \quad z=-1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4, \\ y=3, \\ z=-1. \end{cases}$$

<u>Відповідь</u>: $\{(x;y;z)\}=\{(-4;3;-1)\}$.

Приклад 2.

Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x+3y-4z=-21, \\ 2x-3y-2z=6, \\ 3x+3y-8z=-31. \end{cases}$$

<u>Розв'язання</u>.

За перше рівняння виберемо перше рівняння даної системи. Друге рівняння системи додамо до першого рівняння, домноженого на (-2) і результат додавання запишемо замість другого рівняння системи, а третє рівняння додамо до першого рівняння, домноженого на (-3) і результат додавання запишемо замість третього рівняння:

$$\begin{cases} x+3y-4z=-21, \\ 2x-3y-2z=6, \\ 3x+3y-8z=-31; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y-4z=-21, \\ 0-9y+6z=48, \\ 0-6y+4z=32; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3y-4z=-21, \\ 9y-6z=-48, \\ 6y-4z=-32; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y-4z=-21, \\ 3y-2z=-16, \\ 3y-2z=-16. \end{cases}$$

Оскільки друге та третє рівняння одержаної системи є одне і теж рівняння, то система має безліч розв'язків. Дійсно, додавши друге рівняння до третього, домноженого на (-1), одержимо:

$(3-3)y+(-2+2)z=-16+16 \Leftrightarrow 0\cdot y+0\cdot z=0 \Leftrightarrow 0\cdot z=0 \Leftrightarrow$ $z\in R$. А з першого і другого рівняння останньої системи знайдемо зв'язок невідомих x і y із невідомою z. Отже,

$$\begin{cases} x+3y-4z=-21, \\ 3y-2z=-16, \\ 3y-2z=-16; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y\ \ -4z=-21, \\ 3y\ \ -2z=-16, \\ 0\cdot y+0\cdot z=0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3y-4z=-21, \\ 3y-2z=-16, \\ 0\cdot z=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-21-(3y-2z)+2z, \\ y=\dfrac{-16+2z}{3}, \\ z=\mathrm{t},\ \text{де}\ \ \mathrm{t}\in \mathrm{R}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-21-(-16)+2\,\mathrm{t}, \\ y=\dfrac{-16+2\,\mathrm{t}}{3}, \\ z=\mathrm{t},\ \text{де}\ \ \mathrm{t}\in \mathrm{R}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2\,\mathrm{t}-5, \\ y=\dfrac{2}{3}(\mathrm{t}-8), \\ z=\mathrm{t},\ \text{де}\ \ \mathrm{t}\in \mathrm{R}. \end{cases}$$

Відповідь: система має безліч розв'язків виду $\left(2\mathrm{t}-5; \dfrac{2}{3}(\mathrm{t}\text{ - }8); \mathrm{t}\right)$, де $\mathrm{t}\in \mathrm{R}$.

Приклад 3.

Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 2x - y + z = -2, \\ x + 2y + 3z = -1, \\ x - 3y - 2z = 3. \end{cases}$

<u>Розв'язання</u>.

За перше рівняння виберемо друге рівняння даної системи, тобто поміняємо місцями перше та друге рівняння:

$$\begin{cases} 2x - y + z = -2, \\ x + 2y + 3z = -1, \\ x - 3y - 2z = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = -1, \\ 2x - y + z = -2, \\ x - 3y - 2z = 3. \end{cases}$$

До другого рівняння системи додамо перше рівняння, домножене на (-2) і результат додавання запишемо замість другого рівняння, а до першого рівняння системи додамо третє рівняння, домножене на (-1) і результат додавання запишемо замість третього рівняння:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = -1, \\ 2x - y + z = -2, \\ x - 3y - 2z = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = -1, \\ -5y - 5z = 0, \\ 5y + 5z = -4. \end{cases}$$

Оскільки друге та третє рівняння одержаної системи несумісні, то дана система також несумісна. Дійсно, додамо до третього рівняння останньої системи друге рівняння і результат запишемо замість третього рівняння:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = -1, \\ -5y - 5z = 0, \\ 5y + 5z = -4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = -1, \\ -5y - 5z = 0, \\ 0 = -4. \end{cases}$$

<u>Відповідь</u>: система несумісна.

Продемонструємо метод Гаусса також і для систем трьох лінійних рівнянь з чотирма невідомими.

Приклад 4.

Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x+y+z+t=1, \\ x+y-z \qquad =2, \\ \quad y+z \qquad =0. \end{cases}$

Розв'язання.

За перше рівняння виберемо перше рівняння даної системи. Друге рівняння системи додамо до першого рівняння, домноженого на (-1), а результат додавання запишемо замість другого рівняння системи:

$$\begin{cases} x+y+z+t=1, \\ x+y-z \qquad =2, \\ \quad y+z \qquad =0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+t=1, \\ \quad -2z-t=1, \\ \quad y+z \qquad =0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z \quad +t=1, \\ \qquad z+\frac{1}{2}t=-\frac{1}{2}, \\ \quad y+z \qquad =0. \end{cases}$$

Помінявши місцями друге і третє рівняння системи, одержимо систему трьох лінійних рівнянь з чотирма невідомими трикутного вигляду:

$$\begin{cases} x+y+z+t=1, \\ \quad -2z-t=1, \\ \quad y+z \qquad =0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+t=1, \\ \quad y+z \qquad =0, \\ \quad -2z-t=1. \end{cases}$$

Дана система є сумісною, але невизначеною. Тому надамо невідомій t довільних дійсних значень, тобто $t \in R$, а зв'язок невідомих x, y та z з невідомою t знайдемо з рівнянь останньої системи. Отже,

$$\begin{cases} x+y+z+t=1, \\ \quad y+z \qquad =0, \\ \quad -2z-t=1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+t=1, \\ \quad y+z \qquad =0, \\ \quad -2z-t=1, \\ \qquad 0\cdot t=0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x=1-\mathrm{t}, \\ y=-z, \\ z=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{t}, \\ \mathrm{t}=\mathrm{c},\ \text{де}\ \mathrm{c}\in\mathrm{R}; \end{cases} \quad \Leftrightarrow\begin{cases} x=1-\mathrm{c}, \\ y=\dfrac{1}{2}(1+\mathrm{c}), \\ z=-\dfrac{1}{2}(1+\mathrm{c}), \\ \mathrm{t}=\mathrm{c},\ \text{де}\ \mathrm{c}\in\mathrm{R}. \end{cases}$$

Відповідь: система має безліч розв'язків виду $\left(1-c;\dfrac{1}{2}(1+c);-\dfrac{1}{2}(1+c);c\right)$, де $\mathrm{c}\in\mathrm{R}$.

Приклад 5.

Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x+2y+3z-\mathrm{t}=2, \\ x+y-z-\mathrm{t}=1, \\ 3x+5y+5z-3\mathrm{t}=6. \end{cases}$

Розв'язання.

За перше рівняння виберемо друге рівняння даної системи, тобто поміняємо місцями перше та друге рівняння:

$$\begin{cases} x+2y+3z-\mathrm{t}=2, \\ x+y-z-\mathrm{t}=1, \\ 3x+5y+5z-3\mathrm{t}=6; \end{cases} \Leftrightarrow\begin{cases} x+y-z-\mathrm{t}=1, \\ x+2y+3z-\mathrm{t}=2, \\ 3x+5y+5z-3\mathrm{t}=6. \end{cases}$$

Друге рівняння системи додамо до першого, домноженого на (-1) і результат додавання запишемо замість другого рівняння, а третє рівняння системи додамо до першого рівняння, домноженого на (-3) і результат додавання запишемо замість третього рівняння: $\begin{cases} x+y-z-\mathrm{t}=1, \\ x+2y+3z-\mathrm{t}=2, \\ 3x+5y+5z-3\mathrm{t}=6; \end{cases}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x+y-z-\mathrm{t}=1, \\ y+4z=1, \\ 2y+8z=3; \end{cases} \Leftrightarrow\begin{cases} x+y-z-\mathrm{t}=1, \\ y+4z=1, \\ y+4z=\dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Оскільки друге та третє рівняння одержаної системи несумісні, то дана система також несумісна. Дійсно, додавши до третього рівняння друге рівняння, домножене на (-1), одержимо рівність:

$(1-1)\cdot y+(4-4)\cdot z=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 0\cdot y+0\cdot z=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 0=\dfrac{1}{2}$, яка не має змісту при жодному значенні невідомих x, y та z.

<u>Відповідь</u>: система несумісна.

Метод Крамера

Визначником третього порядку називається число, що визначається за формулою

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{21}\cdot a_{13}\cdot a_{32}+a_{31}\cdot a_{12}\cdot a_{23}-$$

$$-a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}-a_{32}\cdot a_{23}\cdot a_{11}-a_{21}\cdot a_{12}\cdot a_{33}.$$

Цей визначник обчислюється наступним чином: зі знаком плюс беруть всі добутки елементів визначника, які на рис.1 з’єднані прямими, а зі знаком мінус беруть всі добутки елементів визначника, які на рис.2 з’єднані прямими.

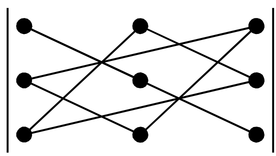
“+” 

Рис. 1

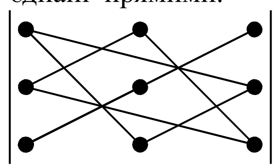
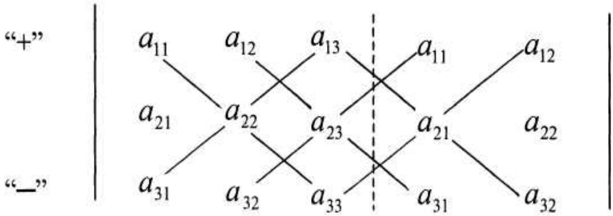
“_” 

Рис. 2

Або ще кажуть, що зі знаком плюс беруть добуток елементів визначника, що стоять на головній діагоналі $(a_{11}a_{22}a_{33})$ та трикутники відносно іншої діагоналі $(a_{13}a_{22}a_{31})$, а зі знаком мінус беруть добуток елементів визначника, що розміщені на другій діагоналі та трикутники відносно головної діагоналі.

Тому це правило обчислення визначника називають правилом “трикутників” або ще правилом “зірочки”.

Визначник третього порядку також можна обчислити за правилом Саррюса: до самого визначника дописують два перших стовпця.



З плюсом беруть добуток елементів основної діагоналі і два паралельні їй добутки (згори вниз). А з мінусом беруть добуток елементів допоміжної діагоналі і два паралельні їй добутки (знизу вгору).

Перейдемо тепер безпосередньо до метода Крамера.

Для системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3, \end{cases} \qquad (3)$$

можливі два основних випадки: $\Delta \neq 0$ або $\Delta = 0$.

I. Якщо визначник цієї системи не дорівнює нулю, тобто $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$, то система (3) має єдиний розв'язок $(x_\circ; y_\circ; z_\circ)$, де $x_\circ$, $y_\circ$ і $z_\circ$ визначаються за формулами Крамера: $x_\circ = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}$, $y_\circ = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}$, $z_\circ = \dfrac{\Delta_z}{\Delta}$. При цьому Δ_x - визначник, одержаний із визначника Δ заміною стовпця коефіцієнтів при x на стовпець вільних членів:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$ Δ_y - визначник, одержаний із визначника Δ заміною стовпця коефіцієнтів при y на стовпець вільних членів: $$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$ Δ_z - визначник, одержаний із визначника Δ заміною стовпця коефіцієнтів при z на стовпець вільних членів: $$\Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

II. Якщо визначник цієї системи $\Delta = 0$, то можливі два випадки:

1) $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = \Delta = 0$ і система (3) має безліч розв'язків (невизначена);

2) $\Delta_x \neq 0$ або $\Delta_y \neq 0$, або $\Delta_z \neq 0$ і система (3) розв'язків не має (несумісна).

<u>Деякі основні властивості визначників</u>:

- кожний добуток містить елементи кожного рядка і кожного стовпця;
- не може добуток містити два (чи більше) елемента з одного рядка (стовпця);
- якщо один з рядків або стовпців визначника містить тільки нулі, то визначник дорівнює нулю;
- визначник, який має два однакові рядки або стовпці, дорівнює нулю;
- якщо два рядка або два стовпця пропорційні, то визначник дорівнює нулю;
- якщо всі елементи стовпця або рядка визначника мають спільний множник, то його можна винести за знак визначника.

Приклад 1.

Розв’язати систему рівнянь $\begin{cases} x + y - 2z = 6, \\ 2x + 3y - 7z = 16, \\ 5x + 2y + z = 16. \end{cases}$

<u>Розв’язання</u>.

Обчислимо визначники даної системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -7 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot (-2) + 5 \cdot 1 \cdot (-7) - 5 \cdot 3 \cdot (-2) -$$

$$- 2 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot (-7) = 2;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 16 & 3 & -7 \\ 16 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 6 \cdot 3 \cdot 1 + 16 \cdot 2 \cdot (-2) + 16 \cdot 1 \cdot (-7) - 16 \cdot 3 \cdot (-2) -$$

$$- 6 \cdot 2(-7) - 16 \cdot 1 \cdot 1 = 6;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 2 & 16 & -7 \\ 5 & 16 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 16 \cdot 1 + 2 \cdot 16 \cdot (-2) + 5 \cdot 6 \cdot (-7) - 5 \cdot 16 \cdot (-2) -$$

$$-1 \cdot 16 \cdot (-7) - 2 \cdot 6 \cdot 1 = 2;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 16 \\ 5 & 2 & 16 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 16 + 2 \cdot 2 \cdot 6 + 5 \cdot 1 \cdot 16 - 5 \cdot 3 \cdot 6 - 2 \cdot 1 \cdot 16 -$$

$$-1 \cdot 2 \cdot 16 = -2 .$$

Оскільки $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв’язок $(x_\circ; y_\circ; z_\circ)$, де $x_\circ = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{6}{2} = 3$, $y_\circ = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = \dfrac{2}{2} = 1$ та

$$z_\circ = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-2}{2} = -1\,.$$

Відповідь: $\{(x; y; z)\} = \{(3;1;-1)\}$.

Приклад 2.

Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 2x - y + z = -2, \\ x + 2y + 3z = -1, \\ x - 3y - 2z = 3. \end{cases}$

Розв'язання.

Обчислимо визначники даної системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 2\cdot 2\cdot(-2) + 1\cdot(-1)\cdot 3 + 1\cdot 1\cdot(-3) - 1\cdot 2\cdot 1 -$$

$$-1\cdot(-1)\cdot(-2) - 2\cdot(-3)\cdot 3 = 0;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & -2 \end{vmatrix} = (-2)\cdot 2\cdot(-2) + 3\cdot(-1)\cdot 3 + (-1)\cdot(-3)\cdot 1 -$$

$$-3\cdot 2\cdot 1 - (-1)\cdot(-1)\cdot(-2) - (-2)\cdot(-3)\cdot 3 = -20.$$

Оскільки $\Delta = 0$, а $\Delta_x \neq 0$, то дана система несумісна.

Відповідь: система несумісна.

Приклад 3.

Визначити скільки розв'язків має система рівнянь

$$\begin{cases} 5x - 3y + z = 3, \\ 4x + y - 5z = 4, \\ x - 4y + 6z = -1. \end{cases}$$

Розв'язання.

Обчислимо визначники даної системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \\ 1 & -4 & 6 \end{vmatrix} = 5\cdot 1\cdot 6 + 1\cdot(-3)\cdot(-5) + 4\cdot(-4)\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot 1 -$$

$$-6\cdot 4\cdot(-3) - 5\cdot(-4)\cdot(-5) = 0;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \\ -1 & -4 & 6 \end{vmatrix} = 3\cdot 1\cdot 6 + (-1)\cdot(-3)\cdot(-5) + 1\cdot 4\cdot(-4) -$$

$$-(-1)\cdot 1\cdot 1 - 3\cdot(-4)\cdot(-5) - 6\cdot 4\cdot(-3) = 0;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 5\cdot 4\cdot 6 + 1\cdot 3\cdot(-5) + 1\cdot 4\cdot(-1) - 1\cdot 4\cdot 1 - 6\cdot 4\cdot 3 -$$

$$-5\cdot(-1)\cdot(-5) = 0;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & 4 \\ 1 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 5\cdot 1\cdot(-1) + 1\cdot(-3)\cdot 4 + 4\cdot(-4)\cdot 3 - 1\cdot 1\cdot 3 -$$

$$-4\cdot(-3)\cdot(-1) - 5\cdot 4\cdot(-4) = 0.$$

Оскільки $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$, то система рівнянь невизначена, тобто має безліч розв’язків.

Відповідь: система має безліч розв’язків.

Приклад 4.

Визначити, при яких значеннях параметра b система рівнянь $\begin{cases} x + y + z = 2, \\ x + y - z = 1, \\ 2x + by + z = 1 \end{cases}$ має хоч би один розв’язок.

Розв’язання.

Знайдемо основний визначник даної системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & b & 1 \end{vmatrix} = 1 + b - 2 - 2 - 1 + b = 2b - 4$$ та допоміжний визначник $$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 - 4 - 2 - 2 + 1 = -5 .$$

Якщо $\Delta = 0 \Leftrightarrow 2b - 4 = 0 \Leftrightarrow b = 2$, то система несумісна, оскільки $\Delta_y = -5 \neq 0$.

Якщо $\Delta \neq 0 \Leftrightarrow b \neq 2$, то система має єдиний розв'язок.

Відповідь: $b \in (-\infty;2) \cup (2;\infty)$.

Приклад 5.

Дослідити і розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x + 2y + z = 2, \\ x + y + 2z = 1, \\ ax + y + 3z = 5. \end{cases}$

Розв'язання.

Обчислимо визначники даної системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ a & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 1 + 4a - a - 6 - 2 = 3a - 4;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 20 + 1 - 5 - 4 - 6 = 12;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ a & 5 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 4a + 5 - a - 10 - 6 = 3a - 8;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 2a + 2 - 2a - 10 - 1 = -4.$$

Якщо $\Delta \neq 0 \Leftrightarrow 3a - 4 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \dfrac{4}{3}$, то система має єдиний розв'язок $(x_\circ; y_\circ; z_\circ)$, де $x_\circ = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{12}{3a-4}$, $y_\circ = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = \dfrac{3a-8}{3a-4}$ та $z_\circ = \dfrac{\Delta_z}{\Delta} = -\dfrac{4}{3a-4}$.

Якщо $\Delta = 0 \Leftrightarrow a = \dfrac{4}{3}$, то система несумісна, оскільки $\Delta_x = 12 \neq 0$.

<u>Відповідь</u>: при $a \neq 1\dfrac{1}{3}$ система має єдиний розв'язок $\left(\dfrac{12}{3a-4}; \dfrac{3a-8}{3a-4}; \dfrac{4}{4-3a}\right)$; при $a = 1\dfrac{1}{3}$ система несумісна.

Приклад 6.

Дослідити і розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ 2x + 3y + z = 1, \\ x + 2y + az = b. \end{cases}$

<u>Розв'язання</u>.

Обчислимо визначники даної системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = 3a + 1 + 4 - 3 - 2a - 2 = a;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ b & 2 & a \end{vmatrix} = 0 + b + 2 - 3b - a - 0 = -2b - a + 2 = 2 - a - 2b;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & b & a \end{vmatrix} = a + 0 + 2b - 1 - 0 - b = b + a - 1 = a + b - 1;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & b \end{vmatrix} = 3b + 1 + 0 - 0 - 2b - 2 = b - 1.$$

Якщо $\Delta \neq 0$, тобто $a \neq 0$, то система має єдиний розв'язок $(x_\circ; y_\circ; z_\circ)$, де $x_\circ = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{2-a-2b}{a}$, $y_\circ = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = \dfrac{a+b-1}{a}$ та $z_\circ = \dfrac{\Delta_z}{\Delta} = \dfrac{b-1}{a}$.

Якщо $\Delta = 0$, тобто $a = 0$, то допоміжні визначники набувають вигляду: $\Delta_x = 2 - 2b = 2 \cdot (1 - b)$, $\Delta_y = b - 1$ та $\Delta_z = b - 1$.

При $a = 0$ і $b \neq 1$ маємо: $\Delta = 0$, а $\Delta_y = \Delta_z \neq 0$, тобто система несумісна.

При $a = 0$ і $b = 1$ маємо: $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$, тобто система має безліч розв'язків.

Дослідимо якого вигляду набувають ці розв'язки. При $a = 0$ і $b = 1$ наша система набуває вигляду:

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ 2x + 3y + z = 1, \\ x + 2y + 0 = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0, \\ x + 2y = 1, \\ x + 2y = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0, \\ x + 2y = 1, \\ 0 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -z, \\ x + 2y = 1, \\ 0 \cdot z = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -z, \\ -z + y = 1, \\ z = \mathrm{t}, \text{ де } \mathrm{t} \in R; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z - y, \\ y = 1 + z, \\ z = \mathrm{t}, \text{ де } \mathrm{t} \in R; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2z - 1, \\ y = z + 1, \\ z = \mathrm{t}, \text{ де } \mathrm{t} \in R; \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2\mathrm{t} - 1, \\ y = \mathrm{t} + 1, \\ z = \mathrm{t}, \text{ де } \mathrm{t} \in R. \end{cases}$$

Тобто, при $a = 0$ і $b = 1$ система має безліч розв'язків виду $(-2\mathrm{t} - 1; \mathrm{t} + 1; \mathrm{t})$, де $\mathrm{t} \in R$.

Відповідь: при $a \neq 0$ і довільному b система має єдиний розв'язок $\left(\dfrac{2 - a - 2b}{a}; \dfrac{a + b - 1}{a}; \dfrac{b - 1}{a}\right)$; при $a = 0$ і $b \neq 1$ система несумісна; при $a = 0$ і $b = 1$ система має безліч розв'язків виду $(-2\mathrm{t} - 1; \mathrm{t} + 1; \mathrm{t})$, де $\mathrm{t} \in R$.

Геометрична інтерпретація розв'язку системи лінійних рівнянь з трьома невідомими.

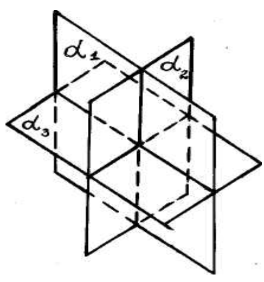
Кожне лінійне рівняння з трьома невідомими x, y, z визначає площину у просторі і відповідно три рівняння системи

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3, \end{cases} \qquad (3)$$

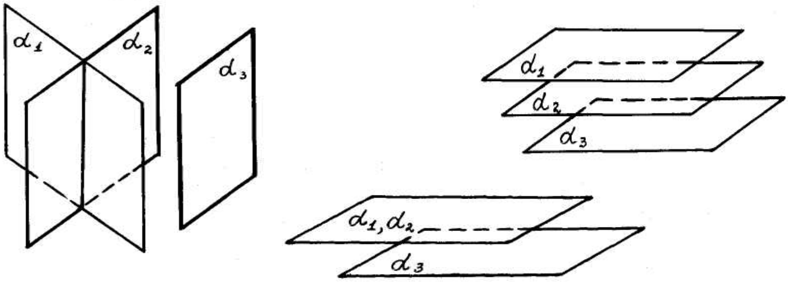
– три площини.

Продемонструємо випадки взаємного розташування цих трьох площин $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, заданих відповідно першим, другим і третім рівняннями системи (3).

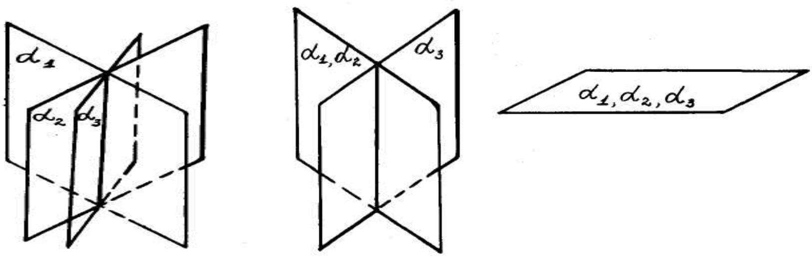
I. Площини $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ перетинаються в одній точці – система має єдиний розв'язок. Причому розв'язком системи є координати цієї точки.



II. Одна з площин $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ паралельна хоч би до однієї з двох інших площин – система несумісна



III. Всі три площини $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ перетинаються по прямій, причому дві з трьох площин або навіть всі три площини, можуть співпадати – система невизначена.



ВПРАВИ ДЛЯ ПРАКИЧНИХ ЗАНЯТЬ ТА САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

1. Розв'язати системи рівнянь:

а) $\begin{cases} 2x - 4y + 4z = 10, \\ -3x + 8y - 10z = -25, \\ 4x - 3y + z = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x - 2y + z = 2, \\ x - 5y + 2z = -2, \\ 2x + 3y - 3z = 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x + y + 3z = 13, \\ x + y + z = 6, \\ 3x + y + z = 8; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x + y + z = 8, \\ 4x - y + 2z = 8, \\ 2x + 2y - z = 3; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x+2y+3z=1, \\ 3x+y+2z=2, \\ 2x+3y+z=3; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x+2y+3z=4, \\ 3x+y+z=5, \\ 2x+3y+z=1. \end{cases}$

<u>Відповідь</u>: а) $\{(-1;-1;2\}$; б) $\{(1;1;1)\}$; в) $\{(1;2;3)\}$; г) $\{(1;2;3)\}$;
д) $\left\{\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)\right\}$; е) $\left\{\left(1\frac{9}{17};-1\frac{4}{17};1\frac{11}{17}\right)\right\}$.

2. Розв'язати системи рівнянь:

а) $\begin{cases} 3x-y-z=0, \\ 2x+y+2z=0, \\ 4x-2y+3z=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x-y-z=0, \\ 2x+y+2z=0, \\ 4x-2y+3z=0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x+2y+z=0, \\ x+3y+2z=0, \\ 2x+y+3z=0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x-y-2z=0, \\ x+3y-4z=0, \\ x+2y+z=0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x+2y-4z=0, \\ 2x+3y+4z=0, \\ 3x+4y+12z=0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x-y+3z=0, \\ 3x-2y+z=0, \\ -6x+5y+5z=0. \end{cases}$

<u>Відповідь</u>: а) $\{(0;0;0)\}$; б) $\{(0;0;0)\}$; в) $\{(0;0;0)\}$; г) $\{(0;0;0)\}$;
д) система має безліч розв'язків виду $(-20t;12t;t)$, де $t \in R$;
е) система має безліч розв'язків виду $(-5t;-7t;t)$, де $t \in R$.

3. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 5x-3y+z=3, \\ 4x+y-5z=4, \\ x-4y+6z=-1. \end{cases}$

<u>Відповідь</u>: система має безліч розв'язків виду

$\left(\frac{15+14t}{17};\frac{8+29t}{17};t\right)$, де $t \in R$.

4. Розв’язати системи рівнянь: а) $\begin{cases} 2x + y - z = 3, \\ 3x + 2y + z = 4, \\ 4x + 3y + 3z = 6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1, \\ 3x + y + 2z = 1, \\ 10x + 15y + 23z = 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + y + 2z = 3, \\ 4x - 3y + 2z = 4, \\ 6x - y + 6z = 1. \end{cases}$

<u>Відповідь</u>: системи несумісні.

5. Розв’язати системи рівнянь:

а) $\begin{cases} 4x + y + z = 2, \\ x + 4y + z = 5, \\ x + y + 4z = 11; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 7x + 2y + 2z = 3, \\ 2x + 7y + 2z = 5, \\ 2x + 2y + 7z = 10; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y = 2, \\ y + z = 3, \\ x + z = 5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + y + z = 1, \\ y + z + t = 3, \\ x + z + t = 8, \\ x + y + t = 9. \end{cases}$

<u>Відповідь</u>: а) $\left\{\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{8}{3}\right)\right\}$; б) $\left\{\left(-\frac{1}{5}; \frac{1}{5}; 1\frac{1}{5}\right)\right\}$;

в) $\{(2;0;3)\}$; г) $\{(-4;-1;-2;8)\}$.

6. Скільки розв’язків має система рівнянь $\begin{cases} x + y = m, \\ z + x = n, \\ y + z = k. \end{cases}$

<u>Відповідь</u>: система має єдиний розв’язок.

7. Розв’язати систему рівнянь $\begin{cases} x + y = p, \\ z + x = r, \\ y + z = q. \end{cases}$

<u>Відповідь</u>: $\left\{\left(\frac{p - q + r}{2}; \frac{p + q - r}{2}; \frac{-p + q + r}{2}\right)\right\}$.

8. При яких значеннях параметра b система рівнянь $\begin{cases} x+y+z=3, \\ x-y+z=5, \\ x+2y+bz=1 \end{cases}$ має хоч би один розв'язок ?

Відповідь: $b \in (-\infty;1) \cup (1;\infty)$.

9. Дослідити і розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 3x+y+z=1, \\ x-y+z=3, \\ x+y+2az=1. \end{cases}$

Відповідь: при $a \neq 0$ система має єдиний розв'язок $\left(\frac{2a-1}{2a}; \frac{1-4a}{2a}; \frac{1}{a} \right)$; при $a=0$ система несумісна.

Системи лінійних рівнянь, що містять знак модуля

Якщо хоч би одне з лінійних рівнянь системи містить модуль, то його зручно розкрити або за означенням, або скориставшись методом інтервалів.

Приклад 1.

Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x-2|y|=-3, \\ |x|+y=3. \end{cases}$

Розв'язання.

Оскільки за означенням модуля $|x|=\begin{cases} x \text{ при } x\geq 0, \\ -x \text{ при } x<0 \end{cases}$ та $|y|=\begin{cases} y \text{ при } y\geq 0, \\ -y \text{ при } y<0, \end{cases}$ то розглянемо такі випадки:

1) при $x=0$ система набуває вигляду $\begin{cases} -2|y|=-3, \\ y=3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |y|=\dfrac{3}{2}, \\ y=3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\pm\dfrac{3}{2}, \\ y=3, \end{cases}$ тобто система несумісна;

2) при $y=0$ система набуває вигляду $\begin{cases} x=-3, \\ |x|=3; \end{cases} \Leftrightarrow x=-3,$ тобто упорядкована пара (-3;0) є розв'язком даної системи;

3) при $\begin{cases} x>0, \\ y>0 \end{cases}$ система набуває вигляду $\begin{cases} x-2y=-3, \\ x+y=3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3+2y, \\ -3y=-6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ y=2, \end{cases}$ тобто упорядкована пара (1;2) є розв'язком даної системи, оскільки $x=1>0$ і $y=2>0$;

4) при $\begin{cases} x<0, \\ y>0 \end{cases}$ система набуває вигляду

$$\begin{cases} x-2y=-3, \\ -x+y=3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3+2y, \\ -y=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3, \\ y=0, \end{cases}$$ що не задовольняє даний випадок;

5) при $\begin{cases} x<0, \\ y<0 \end{cases}$ система набуває вигляду

$$\begin{cases} x+2y=-3, \\ -x+y=3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3-2y, \\ 3y=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3, \\ y=0, \end{cases}$$ що не задовольняє даний випадок;

6) при $\begin{cases} x>0, \\ y<0 \end{cases}$ система набуває вигляду

$$\begin{cases} x+2y=-3, \\ x+y=3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3-2y, \\ y=-6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3+12, \\ y=-6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=9, \\ y=-6, \end{cases}$$

тобто упорядкована пара (9;-6) є розв;язком даної системи, оскільки $x=9>0$ і $y=-6<0$.

Відповідь: $\{(x;y)\}=\{(-3;0),(1;2),(9;-6)\}$.

Приклад 2.

Розв’язати систему рівнянь $\begin{cases} |x|+2y=5, \\ 2x+|y-1|=0. \end{cases}$

Розв’язання.

Оскільки за означенням модуля $|x|=\begin{cases} x \text{ при } x\ge 0, \\ -x \text{ при } x<0, \end{cases}$ то розглянемо сукупність двох випадків:

1) при $x \ge 0$ дана система набуває вигляду

$$\begin{cases} x\ge 0, \\ x+2y=5, \\ 2x+|y-1|=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0, \\ x=5-2y, \\ 10-4y+|y-1|=0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 0, \\ x = 5 - 2y, \\ 10 - 4y + y - 1 = 0, \\ y \ge 1; \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 0, \\ x = 5 - 2y, \\ 10 - 4y + 1 - y = 0, \\ y < 1; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 0, \\ x = 5 - 2y, \\ y = 3; \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 0, \\ x = 5 - 2y, \\ y = \dfrac{11}{5}, \\ y < 1; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 0, \\ x = -1, \\ y = 3; \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 0, \\ x = \dfrac{3}{5}, \\ y = \dfrac{11}{5}, \\ y < 1, \end{cases} \end{array}\right.$$

тобто маємо сукупність несумісних систем, оскільки $\begin{cases} x \ge 0, \\ x = -1 \end{cases}$ несумісна система і $\begin{cases} y = \dfrac{11}{5}, \\ y < 1 \end{cases}$ теж несумісна система;

2) при $x < 0$ дана система набуває вигляду

$$\begin{cases} x < 0, \\ -x + 2y = 5, \\ 2x + |y - 1| = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ x = 2y - 5, \\ 4y - 10 + |y - 1| = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 0, \\ x = 2y - 5, \\ 4y - 10 + y - 1 = 0, \\ y \ge 1; \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ x = 2y - 5, \\ 4y - 10 + 1 - y = 0, \\ y < 1; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 0, \\ x = 2y - 5, \\ 5y = 11, \\ y \ge 1; \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ x = 2y - 5, \\ y = 3, \\ y < 1; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 0, \\ x = -\dfrac{3}{5}, \\ y = \dfrac{11}{5}, \\ y \ge 1; \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ x = 2y - 5, \\ y = 3, \\ y < 1; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -0{,}6, \\ y = 2{,}2, \end{cases}$ оскільки система $\begin{cases} y = 3, \\ y < 1 \end{cases}$ несумісна.

Відповідь: $\{(x; y)\} = \{(-0,6;2,2)\}$.

Приклад 3.

Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} |x| + y = a, \\ x + 2|y| = -1. \end{cases}$

Розв'язання.

Оскільки за означенням модуля $|x| = \begin{cases} x \text{ при } x \geq 0, \\ -x \text{ при } x < 0 \end{cases}$ та $|y| = \begin{cases} y \text{ при } y \geq 0, \\ -y \text{ при } y < 0, \end{cases}$ то розглянемо такі випадки:

1) при $x = 0$ система набуває вигляду $\begin{cases} y = a, \\ 2|y| = -1, \end{cases}$ тобто система несумісна;

2) при $y = 0$ система набуває вигляду $\begin{cases} |x| = a, \\ x = -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ a = 1, \end{cases}$ тобто початкова система має розв'язок (-1;0) при $a = 1$;

3) при $\begin{cases} x > 0, \\ y > 0 \end{cases}$ система набуває вигляду $\begin{cases} x + y = a, \\ x + 2y = -1, \end{cases}$ для якої $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$, $\Delta_x = \begin{vmatrix} a & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2a + 1$, $\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - a$ і за формулами Крамера маємо розв'язок $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = 2a + 1$, $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = -1 - a$, який буде розв'язком початкової системи при тих a, при яких

$\begin{cases} 2a+1>0, \\ -1-a>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>-\dfrac{1}{2}, \\ a<-1; \end{cases} \Leftrightarrow a\in\varnothing$, тобто цей розв’язок не є розв’язком початкової системи при жодному дійсному значенні a;

4) при $\begin{cases} x<0, \\ y>0 \end{cases}$ система набуває вигляду $\begin{cases} -x+y=a, \\ x+2y=-1, \end{cases}$ для якої $\Delta=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-2-1=-3\neq 0$, $\Delta_x=\begin{vmatrix} a & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=2a+1,$ $\Delta_y=\begin{vmatrix} -1 & a \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=1-a$ і за формулами Крамера маємо розв’язок $x=\dfrac{2a+1}{-3}$, $y=\dfrac{a-1}{3}$, який буде розв’язком початкової системи при тих a, при яких $\begin{cases} \dfrac{2a+1}{-3}<0, \\ \dfrac{a-1}{3}>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+1>0, \\ a-1>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>-\dfrac{1}{2}, \\ a>1; \end{cases} \Leftrightarrow a>1$, тобто розв’язок $\left(\dfrac{2a+1}{-3};\dfrac{a-1}{3}\right)$ є розв’язком початкової системи при $a>1$;

5) при $\begin{cases} x<0, \\ y<0 \end{cases}$ система набуває вигляду $\begin{cases} -x+y=a, \\ x-2y=-1, \end{cases}$ для якої $\Delta=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=2-1=1\neq 0$, $\Delta_x=\begin{vmatrix} a & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}=-2a+1$, $\Delta_y=\begin{vmatrix} -1 & a \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=1-a$ і за формулами Крамера маємо розв’язок $x=1-2a$, $y=1-a$, який буде розв’язком початкової системи

при тих a, при яких $\begin{cases}1-2a<0,\\ 1-a<0;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a>\dfrac{1}{2},\\ a>1;\end{cases} \Leftrightarrow a>1$, тобто розв’язок $(1-2a;1-a)$ є розв’язком початкової системи при $a>1$;

6) при $\begin{cases}x>0,\\ y<0\end{cases}$ система набуває вигляду $\begin{cases}x+y=a,\\ x-2y=-1,\end{cases}$ для якої $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-2-1=-3\neq 0$, $\Delta_x=\begin{vmatrix}a & 1\\ -1 & -2\end{vmatrix}=-2a+1$, $\Delta_y=\begin{vmatrix}1 & a\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-1-a$ і за формулами Крамера маємо розв’язок $x=\dfrac{2a-1}{3}$, $y=\dfrac{1+a}{3}$ який буде розв’язком початкової системи при тих a, при яких $\begin{cases}2a-1>0,\\ 1+a<0;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a>\dfrac{1}{2},\\ a<-1;\end{cases} \Leftrightarrow a\in\varnothing$, тобто розв’язок $\left(\dfrac{2a-1}{3};\dfrac{1+a}{3}\right)$ утвореної системи не є розв’язком початкової системи при жодному дійсному значенні a.

Відповідь: при $a<1$ система несумісна; при $a=1$ система має один розв’язок (-1;0); при $a>1$ система має два розв’язки $\left(\dfrac{2a+1}{-3};\dfrac{a-1}{3}\right)$ та $(1-2a;1-a)$.

В системах виду $\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1,\\ |a_2x+n_1|+|b_2y+n_2|=c_2\end{cases}$ доцільно застосовувати метод підстановки, тобто з першого рівняння виразити, наприклад, x через y (при $a_1\neq 0$) і підставити його у друге рівняння системи, яке перетвориться в лінійне рівняння з однією змінною і модулями, і легко розв’язується за допомогою методу інтервалів при розкриванні модулів.

Приклад 4.

Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 2x + y = 7, \\ 2|x-1| + 3|y+2| = 17. \end{cases}$

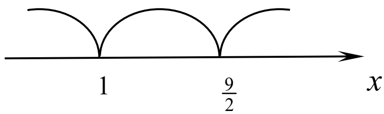
<u>Розв'язання</u>.

$$\begin{cases} 2x + y = 7, \\ 2|x-1| + 3|y+2| = 17; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 7 - 2x, \\ 2|x-1| + 3|7 - 2x + 2| = 17; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 7 - 2x, \\ 2|x-1| + 3|9 - 2x| = 17. \end{cases}$$

Розглянемо друге рівняння останньої системи: $2|x-1| + 3|9-2x| = 17 \quad (*)$. Застосуємо метод інтервалів при розкриванні модулів. Знайдемо характерні точки підмодулевих виразів: $\left[\begin{array}{l} x - 1 = 0, \\ 9 - 2x = 0; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = \dfrac{9}{2}. \end{array} \right.$

Знайденими характерними значеннями змінної x розбиваємо числову вісь на проміжки знакосталості.



Розглянемо рівняння $(*)$ на кожному з утворених проміжків:

1) $x \le 1$: $|x-1| = 1 - x$, $|9-2x| = 9 - 2x$ і рівняння $(*)$ набуває вигляду $2(1-x) + 3(9-2x) = 17$, тобто маємо систему

$$\begin{cases} x \le 1, \\ 2(1-x) + 3(9-2x) = 17; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1, \\ 2 - 2x + 27 - 6x - 17 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1, \\ 8x = 12; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1, \\ x = \dfrac{3}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing;$$

2) $1 < x < \frac{9}{2}$: $|x-1| = x-1$, $|9-2x| = 9-2x$ і рівняння (*) набуває вигляду $2(x-1)+3(9-2x)=17$, тобто маємо систему

$$\begin{cases} 1 < x < \frac{9}{2}, \\ 2(x-1)+3(9-2x)=17; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < \frac{9}{2}, \\ 2x-2+27-6x-17=0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < \frac{9}{2}, \\ 4x = 8; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < \frac{9}{2}, \\ x = 2; \end{cases} \Leftrightarrow x = 2;$$

3) $x \ge \frac{9}{2}$: $|x-1| = x-1$, $|9\text{ - }2\text{x}| = 2x-9$ і рівняння (*) набуває вигляду $2(x-1)+3(2x-9)=17$, тобто маємо систему

$$\begin{cases} x \ge \frac{9}{2}, \\ 2(x-1)+3(2x-9)=17; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \frac{9}{2}, \\ 2x-2+6x-27=17; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \frac{9}{2}, \\ 8x = 46; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \frac{9}{2}, \\ x = \frac{23}{4}; \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{23}{4}.$$

Оскільки $2|x-1|+3|9-2x| = 17 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = \frac{23}{4}, \end{array} \right.$ то система

$$\begin{cases} y = 7-2x, \\ 2|x-1|+3|9-2x| = 17; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 7-2x, \\ \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = \frac{23}{4}; \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2, \\ y = 3, \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{23}{4}, \\ y = -\frac{9}{2}. \end{cases} \end{array} \right.$$

<u>Відповідь</u>: $\{(x;y)\} = \left\{ (2;3), \left(\frac{23}{4}; -\frac{9}{2} \right) \right\}$.

Приклад 5.

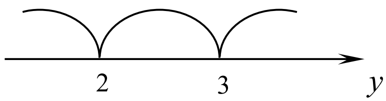
Розв’язати систему рівнянь $\begin{cases} x+y=1, \\ |x+1|+|y-3|=1. \end{cases}$

Розв’язання.

$$\begin{cases} x+y=1, \\ |x+1|+|y-3|=1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-y, \\ |1-y+1|+|y-3|=1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1-y, \\ |2-y|+|y-3|=1. \end{cases}$$

Розглянемо друге рівняння останньої системи: $|2-y|+|y-3|=1 \quad (*)$. Застосуємо метод інтервалів при розкриванні модулів. Знайдемо характерні значення змінної y для підмодулевих виразів: $\left[\begin{array}{l} 2-y=0, \\ y-3=0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2, \\ y=3. \end{array}\right.$ Знайденими характерними значеннями змінної y розбиваємо числову вісь на проміжки знакосталості.



Розглянемо рівняння $(*)$ на кожному з утворених проміжків:

1) $y<2$: $|2-y|=2-y$, $|y-3|=3-y$ і рівняння $(*)$ набуває вигляду $2-y+3-y=1$, тобто маємо систему $\begin{cases} y<2, \\ 2-y+3-y=1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y<2, \\ -2y=-4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y<2, \\ y=2; \end{cases} \Leftrightarrow y\in\varnothing;$

2) $2\le y\le 3$: $|2-y|=y-2$, $|y-3|=3-y$ і рівняння $(*)$ набуває вигляду $y-2+3-y=1$, тобто маємо систему

$$\begin{cases} 2 \le y \le 3, \\ y - 2 + 3 - y = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \le y \le 3, \\ 1 = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \le y \le 3, \\ y \in R; \end{cases} \Leftrightarrow 2 \le y \le 3;$$

3) $y > 3$: $|2 - y| = y - 2,\ |y - 3| = y - 3$ і рівняння $(*)$ набуває вигляду $y - 2 + y - 3 = 1$, тобто маємо систему

$$\begin{cases} y > 3, \\ y - 2 + y - 3 = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > 3, \\ 2y = 6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > 3, \\ y = 3; \end{cases} \Leftrightarrow y \in \varnothing.$$

Оскільки $|2 - y| + |y - 3| = 1 \Leftrightarrow y \in [2;3]$, то система

$$\begin{cases} x = 1 - y, \\ |2 - y| + |y - 3| = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y, \\ y \in [2;3]; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \mathrm{t}, \\ y = \mathrm{t},\ \text{де}\ \mathrm{t} \in [2;3]. \end{cases}$$

Відповідь: система має безліч розв'язків виду $(1 - \mathrm{t}; \mathrm{t})$, де $\mathrm{t} \in [2;3]$.

В системах виду
$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ |a_{31}x + n_1| + |a_{32}y + n_2| + |a_{33}z + n_3| = b_3 \end{cases}$$
також доцільно застосовувати метод підстановки, тобто з першого рівняння виразити, наприклад, x через y і z (при $a_{11} \ne 0$) і підставити це вираження у друге і третє рівняння системи. А потім у другому рівнянні виразити y через z (чи навпаки) і підставити дане вираження у третє рівняння. Тоді третє рівняння останньої системи буде лінійним рівнянням з однією змінною і модулями, яке легко розв'язується за допомогою методу інтервалів при розкриванні модулів.

Приклад 6.

Розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} x + 2y + z = 1, \\ 2x + y - z = 2, \\ |x - 1| + |y + 2| + |z - 3| = 5. \end{cases}$$

Розв’язання.

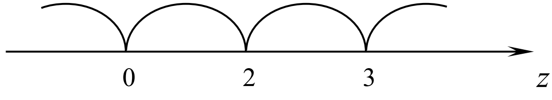
$$\begin{cases} x+2y+z=1, \\ 2x+y-z=2, \\ |x-1|+|y+2|+|z-3|=5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-2y-z, \\ 2(1-2y-z)+y-z=2, \\ |1-2y-z-1|+|y+2|+|z-3|=5; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1-2y-z, \\ 2-4y-2z+y-z=2, \\ |-2y-z|+|y+2|+|z-3|=5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-2y-z, \\ -3y-3z=0, \\ |2y+z|+|y+2|+|z-3|=5; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1-2y-z, \\ y=-z, \\ |2\cdot(-z)+z|+|-z+2|+|z-3|=5; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1-2y-z, \\ y=-z, \\ |-z|+|-z+2|+|z-3|=5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-2y-z, \\ y=-z, \\ |z|+|2-z|+|z-3|=5. \end{cases}$$

Розглянемо третє рівняння останньої системи $|z|+|2-z|+|z-3|=5 \quad (*)$. Застосуємо метод інтервалів при розкриванні модулів. Знайдемо характерні значення змінної z для підмодулевих виразів: $\left[\begin{array}{l} z=0, \\ 2-z=0, \\ z-3=0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=0, \\ z=2, \\ z=3. \end{array}\right.$ Знайденими характерними значеннями змінної z розбиваємо числову вісь на проміжки знакосталості.



Розглянемо рівняння (*) на кожному з утворених проміжків:

1) $z<0$: $|z|=-z,\ |2-z|=2-z,\ |z-3|=3-z$ і рівняння (*) набуває вигляду $-z+2-z+3-z=5$, тобто маємо систему $\begin{cases} z<0, \\ -z+2-z+3-z=5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z<0, \\ -3z=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z<0, \\ z=0; \end{cases} \Leftrightarrow z \in \varnothing;$

2) $0 \le z \le 2$: $|z|=z,\ |2-z|=2-z,\ |z-3|=3-z$ і рівняння (*) набуває вигляду $z+2-z+3-z=5$, тобто маємо систему $\begin{cases} 0 \le z \le 2, \\ -z=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le z \le 2, \\ z=0; \end{cases} \Leftrightarrow z=0;$

3) $2<z<3$: $|z|=z,\ |2-z|=z-2,\ |z-3|=3-z$ і рівняння (*) набуває вигляду $z+z-2+3-z=5$, тобто маємо систему $\begin{cases} 2<z<3, \\ z=4; \end{cases} \Leftrightarrow z \in \varnothing;$

4) $z \ge 3$: $|z|=z,\ |2-z|=z-2,\ |z-3|=z-3$ і рівняння (*) набуває вигляду $z+z-2+z-3=5$, тобто маємо систему $\begin{cases} z \ge 3, \\ z+z-2+z-3=5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z \ge 3, \\ 3z=10; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z \ge 3, \\ z=\dfrac{10}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow z=\dfrac{10}{3}.$

Оскільки $|z|+|2-z|+|z-3|=5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=0, \\ z=\dfrac{10}{3}, \end{array} \right.$ то система

$$\begin{cases} x=1-2y-z, \\ y=-z, \\ |z|+|2-z|+|z-3|=5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-2y-z, \\ y=-z, \\ \left[\begin{array}{l} z=0, \\ z=\dfrac{10}{3}; \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}z=0,\\ y=0,\\ x=1;\end{cases}\\ \begin{cases}z=\dfrac{10}{3},\\ y=-\dfrac{10}{3},\\ x=\dfrac{13}{3};\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1,\\ y=0,\\ z=0;\end{cases}\\ \begin{cases}x=\dfrac{13}{3},\\ y=-\dfrac{10}{3},\\ z=\dfrac{10}{3}.\end{cases}\end{array}\right.$$

<u>Відповідь</u>: $\{(x;y;z)\}=\left\{(1;0;0),\left(\dfrac{13}{3};-\dfrac{10}{3};\dfrac{10}{3}\right)\right\}.$

Приклад 7.

Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases}x+y-z=1,\\ 2x-y+z=3,\\ |3x+1|+|y-1|+|3z+2|=1.\end{cases}$

<u>Розв'язання</u>.

$$\begin{cases}x+y-z=1,\\ 2x-y+z=3,\\ |3x+1|+|y-1|+|3z+2|=1;\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=1-y+z,\\ 2(1-y+z)-y+z=3,\\ |3(1-y+z)+1|+|y-1|+|3z+2|=1;\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=1-y+z,\\ 2-2y+2z-y+z=3,\\ |3-3y+3z+1|+|y-1|+|3z+2|=1;\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y + z, \\ -3y + 3z = 1, \\ |4 - 3y + 3z| + |y - 1| + |3z + 2| = 1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y + z, \\ 3z = 1 + 3y, \\ |4 - 3y + 1 + 3y| + |y - 1| + |1 + 3y + 2| = 1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y + z, \\ 3z = 1 + 3y, \\ 5 + |y - 1| + |3y + 3| = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y + z, \\ 3z = 1 + 3y, \\ 5 + |y - 1| + 3|y + 1| = 1. \end{cases}$$

Розглянемо третє рівняння останньої системи: $5 + |y-1| + 3|y+1| = 1 \Leftrightarrow |y-1| + 3|y+1| = -4 \Leftrightarrow y \in \varnothing$, оскільки сума невід'ємних чисел не може бути від'ємною.Тому остання система рівнянь є несумісною, так як містить рівняння, яке не має змісту при жодному дійсному значенні y.Тоді в силу рівносильних перетворень маємо, що і початкова система несумісна.

Відповідь: система несумісна.

Вправи для практичних занять та самостійного розв'язування

1. Розв'язати системи рівнянь:

а) $\begin{cases} y - 2|x| + 3 = 0, \\ |y| + x - 3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3|x| + 5|y| = 13, \\ 2|x| + 3|y| = 8; \end{cases}$

в) $\begin{cases} |x + y| + y = 1, \\ x + |x - y| = 7; \end{cases}$ г) $\begin{cases} |x + 1| + |y - 4| = 2, \\ |x + 1| + 4 - y = 0. \end{cases}$

Відповідь: а) $\{(0;-3),(2;1),(-6;9)\}$;
б) $\{(1;2),(1;-2),(-1;2),(-1;-2)\}$; в) $\{(3;-1),(-1;-9)\}$;
г) $\{(-2;5),(0;5)\}$.

2. Дослідити і роз'язати системи рівнянь:

а) $\begin{cases} |x| + y = a, \\ x + |y+1| = -1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} |x| + 5|y| = a - 1, \\ |x-1| + 2|y-1| = 1 - a; \end{cases}$ в) $\begin{cases} a|x| - y = a, \\ |x| + ay = 1. \end{cases}$

Відповідь: а) при $a < 0$ система несумісна, при $a = 0$ система має безліч розв'язків виду $(\mathrm{t};\mathrm{t})$, де $\mathrm{t} \in (-\infty;-1]$ і при $a > 0$ система має один розв'язок $\left(\dfrac{a+2}{-2};\dfrac{a-2}{2}\right)$; б) система несумісна при $a \in R$; в) $\{(1;0),(-1;0)\}$ при $a \in R$.

3. Розв'язати системи рівнянь:

а) $\begin{cases} 2x + 3y = 1, \\ |2x+1| + |3y-1| = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + y = 3, \\ |2x+1| + |y-3| = 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x + y = 3, \\ |3x+1| + |y-1| = 21; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + 2y = 3, \\ |x-1| + |2y+1| = 1. \end{cases}$

Відповідь: а) $\left\{\left(\dfrac{1}{2};0)\right),(-1;1),\right\}$; б) $\left\{\left(-\dfrac{3}{5};4\dfrac{4}{5}\right),\left(\dfrac{1}{5};2\dfrac{2}{5}\right)\right\}$;

в) $\left\{\left(3\dfrac{2}{3};-8\right),\left(-3\dfrac{1}{3};13\right)\right\}$; г) система несумісна.

4. Розв'язати системи рівнянь:

а) $\begin{cases} x - y = 2, \\ |x+3| + |y-3| = 8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 2y = -5, \\ \left|\dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{2}\right| + |y-3| = 2. \end{cases}$

Відповідь: а) система має безліч розв'язків виду $(2+\mathrm{t};\mathrm{t})$, де $\mathrm{t} \in [-5;3]$; б) система має безліч розв'язків виду $(2\mathrm{t}-5;\mathrm{t})$, де $\mathrm{t} \in [1;3]$.

5. Розв'язати системи рівнянь:

а) $\begin{cases} |x-1| + y + 2z = 1, \\ x - y + z = 0, \\ |x| + |y| + |z| = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} |2x+1| + y - z = 1, \\ |x| - y + z = -3, \\ 2|x| + |y| - |z| = 2. \end{cases}$

Відповідь: а) $\left\{\left(-\frac{3}{2};-\frac{3}{2};0\right),\left(\frac{3}{2};\frac{7}{6};-\frac{1}{3}\right)\right\}$; б) система несумісна.

6. Розв'язати системи рівнянь:

а) $\begin{cases} x+y-z=1, \\ x+2y-2z=1, \\ |x-3|+|y-3|+|2z-8|=9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-2y+z=0, \\ x-y+2z=0, \\ |x|+|9y+2|+|6z+1|=5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+y+2z=1, \\ x-y-z=2, \\ |x-1|+|2y-1|+|z-1|=1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x-y+2z=3, \\ x+y-z=2, \\ |3x-1|+|y-1|+|3z+1|=1. \end{cases}$

Відповідь: а) $\left\{\left(1;\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right),(1;6;6)\right\}$; б) $\left\{\left(-1;-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right),\right.$ $\left.\left(\frac{2}{3};\frac{2}{9};-\frac{2}{9}\right)\right\}$; в) система несумісна; г) система несумісна.

Список літератури

1. *Вишенський В.А., Перестюк М.О., Самойленко А.М.* Конкурсні задачі з математики.-К.: Вища шк., 2001.

2. *Гайштут А.Г., Ушаков Р.П.* Сборник задач по математике с примерами решений: Для учащихся общеобразов. шк., лицеев и гимназий.-К.: А.С.К., 2002.

3. *Горнштейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С.* Задачи с параметреми.-К.: Евроиндекс, 1995.

4. *Дорофеев Г.В.* Системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными // Квант., 1973.—№9. —с.63-67.

5. *Збірник* задач з математики для вступників до втузів./ За ред. М.І.Сканаві /.—К.: Вища школа, 1996.

6. *Кушнир И.А.* Математика для поступающих в ВУЗы.-К.: Астарта, 1996.

7. *Пособие* по математике для поступающих в вузы / Под ред. Г.Н.Яковлева / —М.: Наука, 1985.

Зміст

Навчальне видання

ОЛІЙНИК Олег Петрович
ОЛІЙНИК Світлана Володимирівна
РИЛОВ Альберт Васильович

СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

Навчально-методичний посібник

3-є видання, стереотипне

В авторській редакції

Підп. до друку 19.05.2021. Формат 60x84/16. Папір офс.
Офс. друк. Ум. друк. арк. 4,88. Обл.-вид. арк. 5,25.
Дод. тираж 50 пр. Замовлення № 95-1.

Видавець і виготівник
Національний авіаційний університет
03680. Київ-58, проспект Любомира Гузара 1.
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 977 від 05.07.2002