

УДК 531.382:539.375.6 (045)

О.А. Вишневський, А.С. Давидов

Національний авіаційний університет, Київ

## ВИЗНАЧЕННЯ КОМПОНЕНТІВ РІВНЯННЯ ЛАГРАНЖА, ЩО ОПИСУЄ ВЗАЄМОДІЮ ЦИЛІНДРА І ПЛОЩИНИ

В роботі розроблена методика визначення компонент рівняння Лагранжа для процесів механічної взаємодії контактуючих тіл циліндричної та плоскої форми. Знайдений розподіл навантаження вздовж дуги нормального до осі перерізу циліндра площиною. Складене рівняння Лагранжа для розглянутої взаємодії з урахуванням неголономної в'язі.

**Ключові слова:** аналітична механіка, розподіл навантаження вздовж дуги, неголономні механічні в'язі.

### Вступ

Схема контакту циліндр з площиною є найбільш поширеним у транспортному, авіаційно-космічному, будівельному та інших видах машинобудівництва. Внаслідок дії неголономної сили тертя та наявності шорсткості має місце зношування контактуючих поверхонь, що призводить до порушення ритму стандартної роботи машин та механізмів.

Процес зміни форми зношуваних поверхонь залежить від циклічності навантаження, швидкості обертання, твердості, пластичності, втомлюваності матеріалів та багатьох інших факторів. Розробників виробів цікавить термін безвідмовної роботи техніки, а також, момент початку зношування, яке призведе до виходу їх з ладу. Для цього треба прогнозувати та контролювати можливі зміни форми контактуючих поверхонь при умовах, які визначають вихід з ладу машин та механізмів під впливом неголономних механічних в'язей, з використанням апарату аналітичної механіки.

**Аналіз останніх досліджень.** Розвитку проблеми можливої зміни геометричної форми контактуючих поверхонь деталей при дії неголономних в'язей приділялось багато уваги в наукових працях.

В роботі [1] розглянуто питання руху важкого тіла обертання по абсолютно шорсткій поверхні, але в ній недостатньо уваги приділено процесу зміни форм контактуючих поверхонь при зануренні циліндра в матеріал, що має плоску поверхню, а також розподілу навантаження вздовж поверхні взаємодії.

Фактори, що впливають на можливу зміну форми поверхонь контактуючих деталей, розглянуто в роботі [2]. В роботі [3] розв'язувалася проблема взаємодії циліндричних та сферичних підшипників, що контактують з матеріалом основи.

Питання зміни форми циліндричних тіл в результаті їх взаємодії з іншими поверхнями розглянуте в роботі [4], проте недостатньо розглянуте питання відповідної зміни форми контактуючого тіла.

Не в достатній мірі розглянуте питання визначення розподілу навантаження по поверхні контакту, а також знаходженню компонент рівняння Лагранжа в роботі [5].

Процес зношування поверхонь контактуючих тіл при екстремальних умовах розглянуто в роботі [6], однак слід більше висвітлити питання прогнозування та попередження виходу з ладу машин та механізмів.

В роботі [7] виконана ідеалізація поверхні взаємодії у вигляді точкового контакту, що можна використати при розв'язанні питань визначення зміни форми контактуючих поверхонь та визначенню компонент рівняння Лагранжа при взаємодії циліндричного та плоского тіл, з урахуванням неголономної в'язі.

**Постановка задачі.** Важливим виглядає вирішення проблеми визначення компонент рівняння Лагранжа, що описує взаємодію циліндричного та плоского тіл при поступовому зношуванні їх контактуючих поверхонь. Під час цього процесу відбувається зміна форм поверхонь дії неголономної в'язі. У зв'язку з цим виглядає доцільним визначити розподіл навантаження вздовж дуги перерізу нормальною до осі циліндра площиною та розробити методику визначення компонент рівняння Лагранжа для процесів механічної взаємодії контактуючих тіл циліндричної та плоскої форми і скласти рівняння Лагранжа для розглянутої взаємодії з урахуванням неголономної в'язі та у випадку її компенсації.

### Результати досліджень

Розглянемо контакт спряження циліндричного тіла з плоским тілом при наявності шорсткості та неголономної в'язі (сили тертя). Циліндричне тіло притискає до поверхні плоского тіла сила навантаження [8]. Під час обертання циліндра навколо своєї осі відбувається процес зношування контактуючих поверхонь при відповідній зміні їх форм.

Нехай вісь Oz декартової системи координат Охуz напрямлена вздовж осі циліндра.

На рис. 1 схематично показаний переріз циліндричного тіла перпендикулярною до осі площиною.

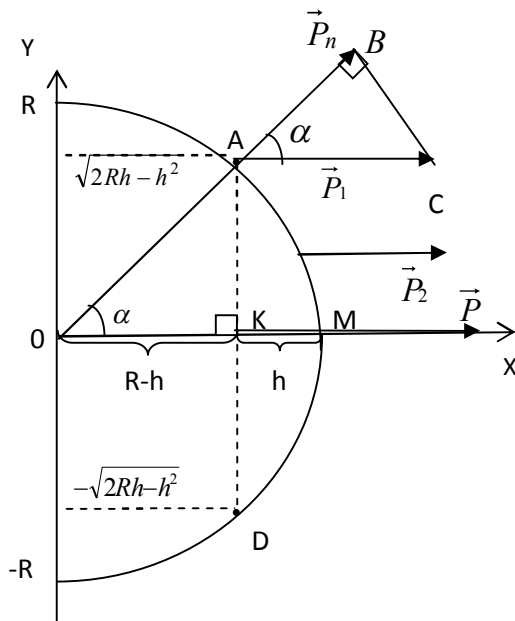


Рис. 1. Прив'язка проєкції циліндра та поверхні плоского тіла на площину Оху до прямокутної системи координат, де пряма AD відповідає рівню поверхні зразка, h – величина лінійного зносу, точка О – проєкція осі ролика на площину Оху

Розподілене вздовж осі Оу навантаження  $P_2$  знайдемо, як розв'язок інтегрального рівняння з крайовими умовами, записаними у вигляді такої системи:

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2Rh-h^2}} \int_0^{\sqrt{2Rh-h^2}} P_2(y) dy = \frac{P_0}{2}; \\ P_2(y) = ay + b; \\ P_2(R) = 0; \\ P_2(\sqrt{2Rh-h^2}) = P_1. \end{cases} \quad (1)$$

З третього та четвертого рівнянь системи (1) знайдемо параметри a і b, тоді

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2Rh-h^2}} \int_0^{\sqrt{2Rh-h^2}} P_2(y) dy = \frac{P_0}{2}; \\ P_2(y) = ay + b; \\ b = -\frac{P_1 a}{\sqrt{2Rh-h^2} - R}; \\ a = \frac{P_1}{\sqrt{2Rh-h^2} - R}. \end{cases} \quad (2)$$

Знайдемо ядро першого в системі інтегрального рівняння у вигляді поданому в другому рівнянні системи:

$$P_2(y) = \frac{P_1(R-y)}{R-\sqrt{2Rh-h^2}}. \quad (3)$$

Використовуючи формулу ядра  $P_2(y)$  і перше рівняння системи (2) знайдемо навантаження  $P_1$ :

$$\frac{1}{\sqrt{2Rh-h^2}} \times \int_0^{\sqrt{2Rh-h^2}} \frac{P_1(R-y)}{R-\sqrt{2Rh-h^2}} dy = \frac{P_0}{2}. \quad (4)$$

Константу  $P_1$  знайдемо, розв'язуючи таке рівняння:

$$\frac{P_1}{\sqrt{2Rh-h^2}} \times \int_0^{\sqrt{2Rh-h^2}} \frac{R-y}{R-\sqrt{2Rh-h^2}} dy = \frac{P_0}{2}. \quad (5)$$

Після відповідних перетворень рівняння (5) отримаємо.

$$P_1 = \frac{P_0(R-\sqrt{2Rh-h^2})}{2R-\sqrt{2Rh-h^2}}. \quad (6)$$

Навантаження буде розподілено вздовж осі Оу за такою формулою:

$$P_2(y) = \frac{P_0(R-y)}{2R-\sqrt{2Rh-h^2}} = \frac{P_0\left(1-\frac{y}{R}\right)}{2-\sqrt{\frac{2h}{R}-\left(\frac{h}{R}\right)^2}}. \quad (7)$$

При  $y=0$  отримаємо таке значення навантаження:

$$P_2(0) = P = \frac{P_0 R}{2R-\sqrt{2Rh-h^2}}. \quad (8)$$

При  $y=R$  навантаження  $P_2(y)$  буде дорівнювати нулю, тобто

$$P_2(R) = 0. \quad (9)$$

Для перевірки коректності отриманих залежностей знайдемо суму проєкцій розподіленого вздовж осі Оу навантаження при  $y>0$  на вісь Ох.

$$\frac{1}{\sqrt{2Rh-h^2}} \times \int_0^{\sqrt{2Rh-h^2}} \frac{P_0(R-y)}{2R-\sqrt{2Rh-h^2}} dy = \frac{P_0}{2}. \quad (10)$$

Результати обчислення інтеграла (10) показують правильність методики знаходження ядра та розв'язання інтегрального рівняння з крайовими умовами.

Знайдемо формулу розподілу навантаження вздовж осі Оу при  $y < 0$ , розв'язуючи систему рівнянь у складі якої: інтегральне рівняння; дві крайові умови; функція, що задає ядро інтегрального рівняння, тобто

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2Rh - h^2}} \int_{-\sqrt{2Rh - h^2}}^0 P_2(y) dy = \frac{P_0}{2}; \\ P_2(y) = ay + b; \\ P_2(-R) = 0; \\ P_2(-\sqrt{2Rh - h^2}) = P_1. \end{cases} \quad (11)$$

Ядро інтегрального рівняння, поданого в системі (11) другим після розв'язання аналогічного розв'язання системи (1), матиме вигляд:

$$P_2(y) = \frac{P_1(R + y)}{R - \sqrt{2Rh - h^2}}. \quad (12)$$

Після підстановки ядра (12) в перше рівняння системи (11) отримаємо формулу розподілу навантаження вздовж осі Оу.

$$P_2(y) = \frac{P_0(R + y)}{2R - \sqrt{2Rh - h^2}}. \quad (13)$$

Для перевірки коректності отриманих залежностей знайдемо суму проєкцій розподіленого вздовж осі Оу навантаження при  $y < 0$  на вісь Ох.

$$\frac{1}{\sqrt{2Rh - h^2}} \times \int_{-\sqrt{2Rh - h^2}}^0 \frac{P_0(R + y)}{2R - \sqrt{2Rh - h^2}} dy = \frac{P_0}{2}. \quad (14)$$

Таким чином сума всіх проєкцій розподіленого навантаження вздовж осі Оу на вісь Ох дорівнює  $P_0$ , причому навантаження в точці А (при  $y=0$ ) будемо рахувати тільки один раз.

Нормальну складову навантаження  $P_n(\alpha)$  знайдемо з прямокутного  $\Delta ABC$ , зображеного на рис. 1:

$$P_n(\alpha) = \frac{P_0(1 - \sin \alpha) \cos \alpha}{2 - \sqrt{2\frac{h}{R} - \left(\frac{h}{R}\right)^2}}. \quad (15)$$

Величину середнього навантаження знайдемо, враховуючи [8], за формулою

$$P_{\text{ср.}} = \int_{AD} P_n(\ell) d\ell / \ell, \quad (16)$$

де  $\ell l$  – довжина дуги АМ.

Для обчислення середнього навантаження зробимо заміни

$$\begin{aligned} x &= R - h = R \cos \alpha, \\ y &= R \sin \alpha. \end{aligned} \quad (17)$$

Після перетворення формули (16), з урахуванням заміни (17), маємо таку залежність:

$$\begin{aligned} P_{\text{ср.}} &= \\ &= \frac{\int_0^{\arccos(1-h/R)} \frac{P_0(1 - \sin \alpha) \cos \alpha}{2 - \sqrt{2\frac{h}{R} - \left(\frac{h}{R}\right)^2}} R d\alpha}{\alpha R}. \end{aligned} \quad (18)$$

Відповідні алгебраїчні перетворення дають можливість отримати середні значення навантаження розподіленого вздовж дуги (ортогонального перерізу поверхні взаємодії площиною при  $y > 0$ ).

$$P_{\text{ср.}} = \frac{P_0 \sqrt{2\frac{h}{R} - \left(\frac{h}{R}\right)^2}}{2 \arccos\left(1 - \frac{h}{R}\right)}. \quad (19)$$

Аналогічну формулу отримаємо для дуги взаємодії, що відповідає значенням  $y < 0$ .

Середнє значення навантаження  $P_c$ , розподіленого вздовж всієї дуги взаємодії, має такий вигляд.

$$P_c = \frac{P_0 \sqrt{2\frac{h}{R} - \left(\frac{h}{R}\right)^2}}{\arccos\left(1 - \frac{h}{R}\right)}. \quad (20)$$

Розглянемо схематичний малюнок, на якому зображено дію основних сил в точці А, що належить контактуючим поверхням циліндра та плоского тіла. Циліндр обертається за годинниковою стрілкою зі швидкістю  $v$ .

В точці А по вертикалі діють сила навантаження  $P$  та протилежно напрямлена до неї сила реакції поверхні  $N$  (рис. 2).

По горизонталі діють обертаюча сила  $F$  і сила, яка протидіє обертанню, неголономна в'язь  $F_{\text{тер}}$  (сила тертя).

При  $F=F_{\text{тер}}$  маємо таке рівняння:

$$m\omega = \bar{P} + \lambda \text{grad}f, \quad (21)$$

де  $f(x,y,z,t) = 0$  – рівняння поверхні взаємодії двох тіл, що залежить від часу взаємодії.

При  $y = 0$  отримаємо:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = \bar{P}_0 + \lambda \text{grad}f, \quad (22)$$

де  $h$  – величина лінійного зносу контактуючих поверхонь, а

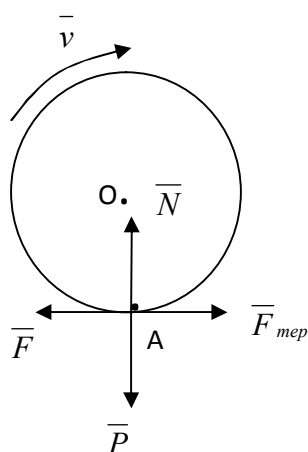


Рис. 2. Схематичне розташування сил, що діють в точці А (визначальній точці взаємодії контактуючих поверхонь)

$$\lambda = -\frac{\text{grad}f \cdot \mathbf{P}_0 + mD_2f}{|\text{grad}f|^2}. \quad (23)$$

При  $F > F_{\text{тер.}}$  і  $F < F_{\text{тер.}}$  маємо наступне рівняння Лагранжа першого роду з урахуванням неголономної в'язі.

$$m\omega = \bar{P}_0 + \lambda \text{grad}f + \bar{F} + \bar{F}_{\text{тер.}}. \quad (24)$$

Диференціальне рівняння (24) подамо у такому вигляді.

$$m\omega = \bar{P}_0 + \lambda \text{grad}f + \bar{F} - k \text{grad}f \frac{v}{v}. \quad (25)$$

Розв'язання диференціальних рівнянь (21, 22, 24, 25) дасть можливість знайти залежність зміни форми контактуючих поверхонь тіл циліндричної та плоскої форм від величини лінійного зносу та від часу взаємодії.

## Висновки

1. Розроблена методика визначення компонент рівняння Лагранжа для процесів механічної взаємодії контактуючих тіл циліндричної та плоскої форми.

2. Складене рівняння Лагранжа першого роду для розглянутої взаємодії з урахуванням неголономної в'язі сили тертя та у випадку її компенсації.

## Список літератури

1. Мидлин И.М. Об устойчивости стационарных движений тяжёлого тела вращения по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости / И.М. Мидлин, Г.К. Пожарицкий. – Прикладная математика и механика. – 1965. – Т. 29, вып. 4. – С. 742-745.
2. Когаев В.П. Прочность и износостойкость деталей машин / В.П. Когаев, Ю.Н. Дроздов. – М.: Высш. шк., 1991. – 319 с.
3. Усов П.П. Контактные задачи с учётом износа для цилиндрических и сферических подшипников скольжения с тонким вкладышем / П.П. Усов, М.А. Галахов // Машиностроение. – 1986. – № 3. – С. 81-88.
4. Усов П.П. Изнашивание жёстких цилиндрических тел / П.П. Усов, М.А. Галахов // Проблемы математики в физико-технических задачах. – М.: МФТИ, 1987. – С. 140-147.
5. Кузьменко А.Г. Износ при возвратно-поступательном движении цилиндра на плоскости (развитие решений) / А.Г. Кузьменко // Проблемы трибологии. – 2007 – № 1. – С. 65-81.
6. Дроздов Ю.Н. Трение и износ в экстремальных условиях: Справочник / Ю.Н. Дроздов, В.Г. Павлов, В.Н. Пучков. – М.: Машиностроение, 1986. – 224 с.
7. Фуфаев Н.А. Об идеализации поверхности соприкосновения в виде точечного контакта в задачах качения / Н.А. Фуфаев. – Прикладная математика и механика. – 1966. – Т. 30, вып. 1. – С. 67-72.
8. Вишневский О.А. Визначення середнього навантаження та тиску на поверхню тертя – основа моделювання процесу випробування матеріалів на абразивну зносостійкість / О.А. Вишневський, О.С. Давидов // Вісник Київського Університету. 2008. – № 2. – С. 73-76.

Надійшла до редколегії 15.03.2016

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. В.С. Харченко, Національний аерокосмічний університет імені М.Є. Жуковського «ХАІ», Харків.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОМПОНЕНТ УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА, КОТОРОЕ ОПИСЫВАЕТ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЦИЛИНДРА И ПЛОСКОСТИ

О.А. Вишневский, О.С. Давыдов

В работе разработана методика определения компонент уравнения Лагранжа для процессов механического взаимодействия контактирующих тел цилиндрической и плоской формы. Найденное распределение нагрузки вдоль дуги нормального к оси сечения цилиндра плоскостью. Составлено уравнение Лагранжа для рассмотренного взаимодействия с учетом неголономной связи.

**Ключевые слова:** аналитическая механика, распределение нагрузки вдоль дуги, неголономные механические связи.

## DETERMINING THE COMPONENTS OF LAGRANGE'S EQUATION WHICH DESCRIBES THE CYLINDER AND PLANE INTERACTION

O.A. Vishnevskii, A.S. Davydov

Method of determining Lagrange's equation components for mechanical interaction of contacting bodies with cylindrical and plane shape. In this paper there was found the load distribution along the arc of section normal to axis and formed by cylinder and plane Lagrange's equation for considered interaction was obtained taking into account nonholonomic connections.

**Keywords:** analytical mechanics, load distribution along the arc, nonholonomic mechanical connections.