УДК 681.324.3

Л.Н. Мазуренко,
В.А. Хорошко,
Я.Л. Шатило

МОДЕЛЬ АНАЛИЗА СТРУКТУРНОЙ ЖИВУЧЕСТИ СЛОЖНОЙ ТЕХНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрены вопросы анализа структурной живучести технических систем для произвольных структур и произвольных функций распределений относительно времени безотказной работы и времени восстановления элементов.

Ключевые слова: *структурная надежность систем, анализ, синтез.*

Розглянуто питання аналізу структурної живучості технічних систем для довільних структур і довільних функцій розподілень щодо часу безвідмовної роботи і часу відновлення елементів.

Ключові слова: *структурна надійність систем, аналіз, синтез.*

Problems of the analysis of structural survivability of technical systems for arbitrary structures and arbitrary functions of distributions, concerning the time of non-failure operation and time of restoration of elements, are considered.

Keywords: *structural reliability of systems, analysis, synthesis.*

Структура технических сложных систем (ТС) является одним из важных компонентов, определяющих их живучесть. Технические системы многообразны по своему значению, классам решаемых задач, условия функционирования и т.д. При проектировании этих систем возникает ряд проблем, связанных с эффективной организацией и обеспечением надежности и качества их функционирования. Разработка и выбор рациональной структуры с учетом требований по надежности и живучести является одним из радикальных методов решения этих проблем. Постановка и решение задач структурного синтеза с одновременным решением проблемы живучести весьма привлекательны, однако такой подход связан с существующими трудностями построения моделей синтеза и поиска решений по этим моделям. Поэтому проблема обеспечения структурной надежности систем решается в два этапа. На первом этапе синтезируются рациональные структуры без учета надежности или живучести, а на втором – полученные структуры анализируются в соответствии с заданными критериями надежности и живучести. В результате проведения анализа либо выбирается наилучший из имеющихся вариантов, либо синтезируется новый альтернативный вариант. Структурная организация системы зависит от ее целей и назначения, решаемых ею задач, условий, в которых она функционирует, и многих других факторов, специфичных для каждой конкретной системы, поэтому первый этап решается для каждой задачи, исходя из ее конкретной постановки. Анализ же надежности и живучести различных вариантов структур систем требует построения таких моделей анализа, которые не зависят от конкретных систем.

В данной работе излагается общая модель анализа структурной надежности и живучести различных систем независимо от их целей и назначения при возможности общих допущений относительно функций распределений времени безотказной работы и времени восстановления элементов системы. До настоящего времени существующие модели анализа структурной надежности системы были связаны в основном с конкретными типами структур и при экспоненциальных допущениях относительно указанных выше функций распределений.

Рассмотрим некоторую производную систему с выбранной структурой. Известны функции распределения времени безотказной работы и времени восстановления ее элементов. Нужно исследовать возможность этой системы, т.е. определить основные надежностные показатели: коэффициент готовности, среднее время восстановления в стационарном режиме, распределение времени до отказа.

Введем основные определения для решения поставленной задачи.

Определение I. Система работоспособна, если она в состоянии решить все поставленные перед ней задачи (достичь всех поставленных целей).

Определение II. Под частичным отказом системы понимается такой отказ, при котором она не в состоянии решить некоторую определенную часть поставленных перед ней задач (достичь некоторых определенных целей).

Определение III. Под полным отказом системы понимается такой отказ, при котором она не в состоянии решить ни одну из поставленных перед ней задач (не достичь ни одной из поставленных целей).

Очевидно, что надежность системы необходимо исследовать только с точки зрения решения конкретных задач, поэтому, при учитывании введенных понятий, становится ясно, что анализ структурной надежности ТС необходимо рассматривать с трех позиций: анализ с точки зрения решения всех поставленных задач (анализ на полную работоспособность); анализ с точки зрения решения некоторого определенного подмножества задач (анализ на частный отказ); анализ с точки зрения решения хотя бы одной из поставленных задач (анализ на полный отказ).

Покажем, что вторая и третья позиция сводится к первой. Для каждой задачи из всей системы можно выделить те элементы и связи, работоспособность которых обеспечивает ее решение, и, следовательно, анализ надежности функционирования ТС с точки зрения решения каждой выделенной задачи приводится к анализу надежности соответствующей подсистемы на полную работоспособность.

Аналогично анализ надежности с точки зрения решения определенного подмножества задач можно свести к анализу надежности некоторой подсистемы, являющейся объединением всех тех подсистем, которые соответствуют задачам, входящим в выделенное подмножество, на полную работоспособность. Для выделенной подсистемы это анализ надежности с первой позиции. Таким образом, полный отказ системы соответствует тому, что ни одна из выделенных подсистем не в состоянии решать поставленную перед ней задачу. Следовательно, можно сделать следующий вывод: анализ структурной надежности ТС при решении поставленных перед ней задач сводится к анализу в отдельности всех подсистем (каждая из подсистем соответствует одной из поставленных задач) на полную работоспособность. Итак, приходим к следующей постановке: имеем некоторую систему с заданной структурой и задачу, поставленную перед ней. Задан алгоритм определения отказа системы, т.е. при отказе таких элементов и связей поставленная перед системой задача не будет решена. Необходимо определить основные надежностные показатели системы с выбранной структурой при решении поставленной задачи.

Математическая модель. Пусть система *S*, состоящая из *N* элементов, имеет определенную заданную структуру. Для описания функционирования системы воспользуемся моделью полумарковского процесса (ПМП) с континуальным фазовым пространством [1, 2]. Допустим, время безотказной работы i-го элемента системы имеет функцию распределения $F_i^{(1)}(t)$, а его время его восстановления $F_i^{(0)}(t)$, которое для определенности считаем абсолютно непрерывным. Пусть для простоты каждый элемент может находиться в двух состояниях: 1 и 0, где 1 означает, что элемент работает, а 0 − восстанавливается. Если отказы и восстановления элементов происходят независимо друг от друга, то функционирование всей системы может быть описано случайным процессом, представляющим собой суперпозицию N независимых альтернирующих процессов. В общем случае "физическое" состояние системы S в любой момент времени можно описать некоторым вектором $d = (d_1,...,d_n)$, где

$$d_i = \begin{cases} 1, \text{если } i-\text{й элемент работоспособен} \\ 0, \text{если } i-\text{й элемент восстанавливается} \end{cases}$$

Обозначим через D множество всех "физических" состояний. Зная функциональную структуру системы и алгоритм определения ее отказа, мы всегда можем представить D в виде $D = D_+ \cup D_-$, где D_+ определяется как множество тех "физических" состояний системы в которых она считается работоспособной, а D_- – отказавшей.

В случае, когда все времена безотказной роботы и времена восстановления экспоненциально распределены, задание D параметров, соответствующих экспоненциальным распределениям и функциональной структуре системы, позволяет построить цепь Маркова с конечным фазовым пространством D, адекватно моделирующую исследуемую систему. Если же некоторые, а тем более все $F_i^{(k)}(t)$, $k = \overline{0,1}$, $i = \overline{1,N}$ неэкспоненциальны, то в общем случае эволюция системы S не может быть описана ни одним из известных типов случайных процессов с фазовым пространством D. М.В. Капустян и В.А. Хорошко [3] рассматривают множество D "физических" состояний системы, добавив к каждому $d \in D$ непрерывную компоненту $x = (x_1,...,x_N)$, где x_i показывает, сколько времени уже проработал или восстанавливается i-й элемент в момент очередного изменения "физического" состояния системы. Знания пары (d, x) позволяет после очередного изменения в момент времени τ_n дискретной компоненты ("физического" состояния системы S) сделать прогноз будущего состояния (d', x') в момент τ_{n+1} следующего изменения дискретной компоненты.

Таким образом, состояние $G = (d, x)$ в момент очередного изменения состояния системы показывает следующее: какие элементы в данный момент времени работоспособны, а какие восстанавливаются (по коду d); какой элемент в данным момент вышел из строя или же полностью восстановился (по номеру той компоненты из x, которая равна нулю); сколько времени восстанавливаются или не работают остальные элементы (по значениям остальных компонент x).

Для конструктивного задания ПМП $q(t)$, описывающего функционирование системы, после того, как описано его фазовое пространство, требуется построить полумарковское ядро Q(t,c,Г) либо (что то же самое) переходные вероятности $P(c,\Gamma)$, вложенной в $q(t)$ цепи Маркова q_n, и функции распределения времени пребывания $G_{c_n j}(t), c.j \in E$. Расширенные множества “физических” состояний D системы S до множества $E=\{e=(d,x), d\in D, x\in R_+^N\}$ – фазового пространства, соответствующего ПМП, проводить по совершенно стандартной схеме, что не является сколько-нибудь значительным препятствием на пути построения математической модели системы. Не приводя подробных выкладок, отметим, что авторами построены переходные вероятности:

$$P(e,\Gamma)=0\{\infty,e,\Gamma\}=\{q(\tau_{n+1})\in\Gamma/q(\tau_n)=e\}$$

и функции распределений времени пребывания $G_{c_n j}(t)=\{\tau_{n+1}-\tau_n+\tau_n/q_n=e, q_{n+1}=j\}$, и далее, полагая, что в $\varphi(t,c,\Gamma)=P\{q(t)\in\Gamma/q(0)=e\}$, указаны достаточные условия, позволяющие в явном виде

$$\lim_{t\to\infty}\varphi(t,c,\Gamma)=\prod(e,\Gamma).$$

Стационарная мера $\prod(e.\ \Gamma)$ (при допущенных предположениях она является единственной) позволяет вычислить основные стационарные характеристики процесса $q(t)$, а значит, и моделируемой им системы.

Стационарным коэффициентом готовности, системы с определением [4] назовем

$$\lim_{t\to\infty}P\{q(t)\in E_{|+}/q(0)=\varepsilon\},$$

где

$$E_+=\{\varepsilon\in E:\varepsilon=(d,k), d\in D_+\},$$
$$E_-=\{\varepsilon\in E:\varepsilon=(d,k), d\in D_-\},$$

а

$$E_+\cup E_-=E.$$

Здесь $E_{|+}$ – множество работоспособных состояний системы;

E_- – множество отказовых состояний. Для коэффициента готовности доказана формула

$$K_{\Gamma}=\frac{\sum\limits_{d\in D_+}\prod\limits_{i=1}^{N}Mq_i^{d_i}}{\sum\limits_{d\in D}\prod\limits_{i=1}^{N}Mq_i^{d_i}},$$

где $Mq_i^{l_i}$ – среднее значение случайной величины $q_i^{d_i}$, описывающей время безотказной работы или время восстановления i-го элемента $(i=\overline{1,N})$ в зависимости от $d_i (d_i = \overline{0,1})$ [5].

Обозначим через $q^*_{n\varepsilon}$ случайную величину с функцией распределения $P\{q^*_{n,\varepsilon} \le t\} = P\{q_{q_n} \le t / q_n = c \in E_+, q_1,...,q_{\alpha-1} \in E_+, q_0 \in E_+\}$, где

$$q_e^+ = \inf\{t \ge 0 : q(t) \in E_+, q(0) = e \in E_+\},$$

$$q_e^- = \inf\{t \ge 0 : q(t) \in E_-, q(0) = e \in E_-\},$$

т.е. q_e^+ – время безотказной работы системы S при условии, что в начальный момент она находится в E_+, а q_e^- – время восстановления системы S при условии, что в начальный момент она находится в E_-.

Пусть $T^{\pm}_{n,e} = Mq^{\pm}_{n,e}$. Величину $T^+ = \lim T^{\pm}_{n,e}, n \to \infty$, если предел существует (соответственно T^-), назовем наработкой на отказ системы S (соответственно средним стационарным временем для восстановления системы S).

Значения T^+ и T^- могут быть вычислены по формулам

$$T^+ = \frac{\sum\limits_{d \in D_+} \prod\limits_{i=1}^{N} Mq_i^{d_i}}{\sum\limits_{k \in D_-} \sum\limits_{d_j \in D_+} \prod\limits_{i=1}^{N} Mq_e^{k_e}};$$

$$T^- = \frac{\sum\limits_{d \in D_-} \prod\limits_{i=1}^{N} Mq_i^{d_i}}{\sum\limits_{k \in D_+} \sum\limits_{d_j \in D_-} \prod\limits_{\substack{i=1 \\ i \ne j}}^{N} Mq_e^{k_e}},$$

где k и d_j отличаются j-й компонентной.

Теперь рассмотрим распределение времени до отказа. Обозначим через $\varphi_{(d,x)}(t)$ функцию распределения времени пребывания ПМП q(t) в E^+ до первого попадания в множество E^-, начиная с состояния $(d,x) \in E^+$.

Учитывая моменты нулевого скачка ПМП q(t) для распределяющей $\varphi_{(d,x)}(t)$, можно записать систему интегральных уравнений марковского восстановления

$$\phi_{(d,x)}(S) = \sum_{m \in D_-} Q\{(d,x),(m[0,\infty],t\} +$$

$$+ \sum_{m \in D_+} \int_{R_+^N} \int_0^t Q\{(d,x),(m,dy)dx\} \phi_{(m,y)}(t-x); (d,x) \in E_+$$

или в преобразованиях Лапласа-Стильтьеса

$$\phi_{(d,x)}(S) = \sum_{m \in D_-} Q\left\{(d,x),(m\left[0,\infty\right],t\right\} +$$

$$+\sum_{m \in D_+} \int_{R_+^m} \int_0 Q\left\{(d,x),(m,dy)dx\right\}\phi_{(m,y)}(t-x);(d,x)\in E_+,$$

где

$$Q\{(d,x),(m[0,y],S\} = \int_0^{\infty} e^{-st} d_t Q\{(d,x),(m[0,y],t\}.$$

Поскольку поиск аналитических решений указанной системы затруднителен, то можно рекомендовать многочисленные методы поиска приблизительного решения. Но в практически каждой ситуации быстрого восстановления для оценки искомых распределений можно использовать результаты теории фазового укрупнения, полученные применительно к ПМП с произвольным фазовым пространством в работе [1]. Можно показать, что в этом случае в качестве приближения для распределения времени безотказной работы системы при достаточно быстром восстановлении можно использовать экспоненциальное распределение.

Необходимо отметить, что структурная надежность ТС существенно зависит от распределения безотказной работы и времен восстановления элементов, поэтому принятие экспоненциального распределения для функции $F_i^{(k)}(t), i=\overline{1,N}, k=\overline{0,1}$ элементов системы приводит к значительному искажению показателей надежности. Разработанная модель анализа структурной надежности устраняет этот недостаток. Она позволяет анализировать надежностные показатели системы с любой структурной организацией, что может широко применяться при анализе качества и надежности функционирования ТС, прогнозирования динамики отказа, планирования технического обслуживания.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Томашевский В.М.* Моделирование систем / В.М. Томашевский. – К. : Вид. група BHV, 2007. – 352 с.

2. *Згуровський М.З.* Основи системного аналізу / М.З. Згуровський, Н.Д. Панкратова. – К. : Вид. група BHV, 2007. – 544 с.

3. *Капустян М.В.* Оценка эффективности функционирования сложных систем / М.В. Капустян, В.А. Хорошко // Інформаційна безпека. – 2011. –№ 1. – С. 5–8.

4. *Арфкен Г.* Математические методы в физике / Г. Арфкен. – М. : Атомиздат, 1970. – 712 с.

5. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х томах / В. Феллер. – М. : Мир, 1967.

Отримано 2.12.2011