МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний авіаційний університет

Л.М. ЛОМОНОС, Н.П. МУРАНОВА

МАТЕМАТИКА

Зразки білетів
для проведення співбесіди із вступниками
в Інституті доуніверситетської підготовки

Посібник

Київ 2005

УДК 378.141(076.5)
ББК В 10я7
Л 753

Рецензенти: д-р фіз.-мат. наук, проф. *Н.О. Вірченко* (Національний технічний університет України "КПІ"), канд. фіз.-мат. наук, доц. *І.Ю. Каніовська* (Національний авіаційний університет)

Затверджено методичною радою Інституту довузівської підготовки НАУ 15 лютого 2005 року.

Ломонос Л.М., Муранова Н.П.

Л753 Математика. Зразки білетів для проведення співбесіди із вступниками в Інституті до університетської підготовки. Посібник. – К.: НАУ, 2005. – 48 с.

Посібник містить програму з математики, зразки білетів для проведення співбесіди із вступниками на підготовче відділення, на вечірні та заочні підготовчі курси, зразки виконання основних типових задач з вказаних білетів.

Наведено програму з математики, рекомендовану Міністерством освіти і науки України для вступників до вищих навчальних закладів.

Призначений для вступників в Інститут довузівської підготовки, а також для викладачів для проведення вхідної співбесіди.

УДК 378.141(076.5)
ББК В 10я7

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Вхідна співбесіда з математики проводиться із вступниками в ІДП НАУ з метою виявлення знань в рамках шкільної програми з даної дисципліни. Вступники в ІДП повинні впевнено володіти математичними знаннями і навиками, передбаченими програмою , вміти застосовувати їх при розв'язуванні задач і вправ.

Білет співбесіди містить одне теоретичне питання (доводити не треба) і 3 приклади різної складності: перші два питання оцінюються по 10 балів, третє і четверте – по 20 балів. Максимальна кількість балів дорівнює 60.

Даний посібник складається з шести розділів. Перший розділ містить програму з математики для проведення співбесіди із вступниками в ІДП. В 2 і 4 розділах наводяться зразки білетів для проведення співбесіди із вступниками на підготовчі курси та підготовче відділення. У 3 і 5 розділах наводяться зразки виконання деяких завдань з вказаних білетів. В шостому розділі міститься програма з математики, рекомендована Міністерством освіти і науки України для вступників до вищих навчальних закладів.

Проведення вхідної співбесіди сприяє розвитку правильної індивідуальної роботи викладачів із слухачами ІДП.

Даний посібник допоможе вступникам в ІДП систематизувати свої знання з математики при підготовці до вхідної співбесіди і підготувати себе для успішного навчання в ІДП.

1. ПРОГРАМА З МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ПРОВЕДЕННЯ СПІВБЕСІДИ ІЗ ВСТУПНИКАМИ В ІДП (ПІДГОТОВЧЕ ВІДДІЛЕННЯ ТА ПІДГОТОВЧІ КУРСИ)

І. Арифметика, алгебра.

1. Найбільший спільний дільник (НСД) і найменше спільне кратне (НСК) натуральних чисел.
2. Звичайні дроби, дії над ними.
3. Десяткові дроби, дії над ними.
4. Пропорції, властивості пропорцій.
5. Відсотки.
6. Дії над степенями з натуральними та раціональними показниками. Арифметичний корінь та його властивості.
7. Модуль дійсного числа, його геометричний зміст.
8. Одночлен і многочлен. Дії над ними.
9. Формули скороченого множення $((a \pm b)^2, (a \pm b)^3, a^2 - b^2,$ $a^3 \pm b^3, (a+b+c)^2)$.
10. Поняття функції. Способи задання функції. Область визначення та область значень функції. Властивості функцій: парність, непарність, періодичність.
11. Основні властивості і графіки елементарних функцій: $y = kx + b$; $y = ax^2 + bx + c$; $y = \frac{k}{x}$; $y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = tg\, x$; $y = ctg\, x$.
12. Лінійні рівняння з однією змінною. Системи двох лінійних рівнянь з двома змінними.
13. Квадратні рівняння. Знаходження коренів. Теорема Вієта.
14. Розкладання квадратного тричлена на лінійні множники.
15. Основні властивості числових нерівностей.
16. Розв'язання найпростіших раціональних та ірраціональних нерівностей.
17. Арифметична прогресія.
18. Геометрична прогресія.
19. Співвідношення між сторонами і кутами прямокутного трикутника. Тригонометричні функції довільного кута.
20. Основні тригонометричні тотожності.
21. Формули зведення.
22. Тригонометричні функції подвійного та половинного аргументу.

23. Формули додавання аргументів тригонометричних функцій $(\sin(\alpha \pm \beta), \cos(\alpha \pm \beta), tg(\alpha \pm \beta))$.
24. Формули перетворення добутку тригонометричних функцій в суму і навпаки.
25. Розв'язання найпростіших тригонометричних рівнянь.

II. Геометрія.

1. Вертикальні та суміжні кути. Паралельні прямі.
2. Вектори. Операції над векторами.
3. Трикутник. Основні лінії у трикутнику (медіана, бісектриса, висота, середня лінія), їх властивості.
4. Сума кутів трикутника. Сума кутів опуклого многокутника. Зовнішній кут трикутника, його властивість.
5. Рівносторонній, рівнобедрений та прямокутний трикутники, їх властивості. Теорема Піфагора.
6. Обчислення площі трикутника.
7. Ознаки рівності трикутників.
8. Ознаки подібності трикутників.
9. Чотирикутники: паралелограм, прямокутник, ромб, квадрат, трапеція. Їх основні властивості і формули площ.
10. Коло і круг, їх основні елементи. Властивості дотичної до кола. Центральні і вписані кути, їх властивості.
11. Коло, вписане в трикутник та описане навколо нього.
12. Коло, вписане в чотирикутник та описане навколо нього.

III. Додаткові питання для співбесіди із вступниками на підготовче відділення.

1. Показникова функція, її властивості та графік.
2. Логарифми, їх властивості.
3. Логарифмічна функція, її властивості та графік.
4. Найпростіші показникові, логарифмічні рівняння та нерівності.
5. Похідна функції. Механічний та геометричний зміст похідної. Похідна суми, добутку і частки двох функцій.
6. Знаходження екстремумів функції та найбільшого і найменшого значень функції на заданому проміжку.
7. Рівняння дотичної до графіка функції.
8. Многогранники. Формули площ їх поверхонь та об'ємів.
9. Тіла обертання. Формули площ їх поверхонь та об'ємів.

2. ЗРАЗКИ БІЛЕТІВ З МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ПРОВЕДЕННЯ СПІВБЕСІДИ ІЗ ВСТУПНИКАМИ НА ПІДГОТОВЧІ КУРСИ

Білет № 1-К

1. Коло і круг, їх основні елементи. Центральні і вписані кути, їх властивості.
2. Побудувати графіки функцій:
$$a)\, y = -x^2 - x + 6; \quad b)\, y = -x^2 - |x| + 6\,.$$
3. Розв'язати нерівність $\dfrac{\sqrt{x+4}}{1-x} < 1$.
4. Розв'язати рівняння $\cos^2(x - 30^0) + 2\sin(120^0 - x) = -1$.

Білет № 2-К

1. Чотирикутники: паралелограм, прямокутник, ромб, квадрат, трапеція. Їх основні властивості.
2. Знайти область визначення функції $y = \sqrt{\dfrac{2+x}{x(1+x)} - 1}$.
3. Розв'язати рівняння $\sin^3 x + \cos^3 x + \sin x \cdot \cos x = 1$.
4. Восьмий член арифметичної прогресії складає 40% четвертого, а сума їх дорівнює 2,8. Скільки треба взяти членів цієї прогресії, щоб їх сума дорівнювала 14,3?

Білет № 3-К

1. Формули скороченого множення:
$(a \pm b)^2, (a \pm b)^3, a^2 - b^2, \; a^3 \pm b^3, (a + b + c)^2$.
2. Побудувати графік функції $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4} + 2x + 1$.
3. Розв'язати рівняння $\cos^2 x - 3\sin x \cos x + 1 = 0$.
4. Розв'язати нерівність $\sqrt{x+5} > \sqrt{x+4} + \sqrt{x+3}$.

Білет № 4-К

1. Трикутник. Медіана, бісектриса, висота, середня лінія трикутника, їх властивості.
2. Обчислити $\cos\frac{13\pi}{12}$ i $\sin\frac{13\pi}{12}$.
3. Розв'язати рівняння $\sqrt[3]{x+45}-\sqrt[3]{x-16}=1$.
4. Між числами 113 і 163 розташувати 9 чисел, які разом з даними складали би арифметичну прогресію.

Білет № 5-К

1. Сума кутів трикутника. Сума кутів опуклого многокутника. Зовнішній кут трикутника, його властивості.
2. Розв'язати рівняння $\frac{3x}{2x^2+5x+2}+\frac{5x}{2x^2+11x+2}=\frac{2}{3}$.
3. Знайти область визначення функції
$$y=\sqrt[3]{\frac{10-x}{4-x^2}-\frac{1}{2}}+\sqrt[4]{x+\frac{2}{x}-3}.$$
4. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{4}, \\ \sin x\cdot\cos y=0{,}25. \end{cases}$

Білет № 6-К

1. Формули перетворення добутку тригонометричних функцій в суму і навпаки. Графіки функцій: $y=\sin x$, $y=tgx$.
2. Спростити вираз $\sqrt{b+2\sqrt{b+2}+3}+\sqrt{b-2\sqrt{b+2}+3}$.
3. Розв'язати нерівність $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+3\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}<4$.
4. Бісектриса прямого кута прямокутного трикутника ділить гіпотенузу на відрізки 75см і 100см. Обчислити довжину відрізків гіпотенузи, на які її ділить висота, проведена до неї.

Білет № 7-К

1. Вертикальні та суміжні кути. Ознаки паралельності двох прямих.
2. Знайти область визначення функції $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 7x + 12} - 1}$.
3. Розкласти на множники $(x^2 + x + 4)^2 + 8x(x^2 + x + 4) + 15x^2$.
4. Розв'язати рівняння $5(1 + \cos x) = 2 + \sin^4 x - \cos^4 x$.

Білет № 8-К

1. Коло, вписане в чотирикутник та описане навколо нього.
2. Спростити вираз $\dfrac{(x+2)\cdot\sqrt{(x+2)^2 - 8x}}{x^2 - 4|x-1|}$.
3. Розв'язати рівняння $(x+1)(x-2)(x-3)(x-6) = 13$.
4. Розв'язати нерівність $\dfrac{\cos 75^0 \cos 15^0 + \sin 75^0 \sin 15^0}{x^2 - 1} < \dfrac{1}{2}$.

Білет № 9-К

1. Трапеція. Середня лінія трапеції. Площа трапеції.
2. Побудувати графіки функцій $а) y = \dfrac{x-1}{x+1}$; $б) y = \dfrac{|x|-1}{|x|+1}$.
3. Обчислити без таблиць $\cos 20^0 \cdot \cos 40^0 \cdot \cos 60^0 \cdot \cos 80^0$.
4. Розв'язати рівняння $2x^3 - 5x^2 - 5x + 2 = 0$.

Білет № 10-К

1. Квадратні рівняння. Знаходження коренів. Теорема Вієта.
2. Розв'язати рівняння $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[6]{x-1} = 6$.
3. Довести тотожність $\sin^2\left(\dfrac{7\pi}{8} - 2\alpha\right) - \sin^2\left(\dfrac{9\pi}{8} - 2\alpha\right) = \dfrac{\sin 4\alpha}{\sqrt{2}}$.
4. Основи трапеції дорівнюють 3 см і 14 см, а діагоналі – 25 см і 26 см. Знайти висоту трапеції.

Білет № 11-К

1. Співвідношення між сторонами і кутами прямокутного трикутника. Тригонометричні функції довільного кута.
2. Побудувати графік функції $y = \frac{|x+1|}{x+1}\left(x^2 - 5x + 6\right)$.
3. Розв'язати нерівність $|x+2| + |x+3| \geq |x+4|$.
4. Знайти довжину вектора $\vec{a} + \vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 5\,см$, $|\vec{b}| = 8\,см$, а кут між ними 120^0.

Білет № 12

1. Арифметична та геометрична прогресії. Формули *n*-го члена і суми *n* перших членів.
2. Побудувати графіки функцій
$$а)\; y = (1+x)(2-x); \quad б)\; y = (1+|x|)(2-|x|).$$
3. Довести тотожність
$$\frac{\cos 6\alpha - \cos 7\alpha - \cos 8\alpha + \cos 9\alpha}{\sin 6\alpha - \sin 7\alpha - \sin 8\alpha + \sin 9\alpha} = ctg\frac{15\alpha}{2}.$$
4. Два кола, різниця радіусів яких дорівнює 4 см, дотикаються зовнішнім чином. Відстань від точки дотику до їх спільної дотичної дорівнює 3 см. Обчислити радіуси цих кіл.

Білет № 13-К

1. Вектори. Операції над векторами.
2. Знайти область визначення функції $y = \sqrt{\frac{x}{3} - \frac{4}{x} - \frac{4}{3}}$.
3. Розв'язати рівняння $\sqrt{3}\sin\left(x - 45^0\right) + \sin\left(x + 45^0\right) = \sqrt{2}$.
4. Бісектриси гострих кутів при основі трапеції перетинаються на другій основі, а бічні сторони дорівнюють 13 см і 15 см. Знайти основи трапеції, якщо її висота дорівнює 12 см.

Білет № 14-К

1. Пропорції, властивості пропорцій. Середнє геометричне і середнє арифметичне декількох чисел.
2. Розв'язати рівняння $\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x}}+\sqrt[3]{\dfrac{x}{x-1}}=\dfrac{10}{3}$.
3. Спростити вираз $\sin^4\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)-\sin^4\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)$.
4. Одна із сторін трикутника дорівнює 20 см, а медіани, проведені до двох інших сторін, дорівнюють 18 см і 24 см. Обчислити площу трикутника.

Білет № 15-К

1. Модуль числа та його властивості. Геометричний зміст модуля. Арифметичний корінь та його властивості.
2. Спростити вираз
$$\sin 825^0\cdot\cos\left(-15^0\right)+\cos 75^0\cdot\sin\left(-555^0\right)+tg155^0\cdot tg245^0.$$
3. Розв'язати нерівність $6x^2-13|x|+6\geq 0$.
4. З однієї вершини трикутника проведено висоту, бісектрису і медіану. Відстані від другої вершини до кінців висоти, бісектриси і медіани відповідно дорівнюють 21, 25 і 25,5см. Обчислити периметр трикутника.

Білет № 16-К

1. Основні властивості і графіки елементарних функцій:
$$y=kx+b,\quad y=ax^2+bx+c,\quad y=\frac{k}{x}.$$
2. Розв'язати рівняння $x^2+4x+|x+2|-16=0$.
3. Довести тотожність
$$\sin^2\left(\frac{15\pi}{8}-2\alpha\right)-\cos^2\left(\frac{17\pi}{8}-2\alpha\right)=-\frac{\cos 4\alpha}{\sqrt{2}}.$$
4. Діагоналі ромба відносяться як 3:4, а бісектриса кута між ними ділить його сторону довжиною 70 см на два відрізки. Знайти ці відрізки.

Білет № 17-К

1. Коло, вписане в трикутник та описане навколо нього.
2. Спростити вираз

$$\frac{\sin\left(-328^0\right)\cdot\sin 958^0}{ctg572^0}-\frac{\cos\left(-508^0\right)\cdot\cos\left(-1022^0\right)}{tg\left(-212^0\right)}.$$

3. Між числами 1 і 16 вставити такі три числа, щоб вони разом з даними утворювали би геометричну прогресію.
4. Розв'язати рівняння та нерівності:

$$а)\left|2x+3\right|\le -5;\quad б)\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2};\quad в)\frac{x^2-1}{x^3+1}<1.$$

Білет № 18-К

1. Основні властивості числових нерівностей.
2. Сума двох чисел дорівнює 527. Відомо, що 8% першого числа дорівнюють 7,5% другого. Знайти ці числа.
3. Розв'язати рівняння та нерівності:

$$a)\,4x^2-16=0;\ b)\cos x=-\frac{1}{2};\ c)\sqrt{x^2-9}<-3;\ d)\left|x+1\right|>2.$$

4. Радіуси двох кіл, що перетинаються, дорівнюють 13 см і 15 см, а спільна хорда дорівнює 24 см. Знайти відстань між центрами цих кіл.

Білет № 19-К

1. Формули площ трикутника, паралелограма, трапеції.
2. Позбутися ірраціональності у знаменнику .

$$a)\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}};\ b)\frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}.$$

3. Розв'язати нерівність $\dfrac{x^2+4}{\sqrt{x+4}-x+2}>0.$
4. Розв'язати рівняння $7+4\cos x\sin x+1{,}5(tg\,x+ctg\,x)=0.$

Білет № 20-К

1. Коло. Дотична до кола та її властивість. Кут, утворений дотичною та січною.
2. Спростити вираз $\dfrac{\sin 515^0 \cdot \cos(-475^0) + ctg\,222^0 \cdot ctg\,408^0}{ctg\,415^0 \cdot ctg\,(-505^0) + tg\,197^0 \cdot tg\,73^0}$.
3. Розв'язати нерівність $\dfrac{4x^2 - 5x - 1}{2x^2 - 5x + 3} > 1$.
4. Розв'язати рівняння $2x^4 - 9x^3 + 9x - 2 = 0$.

3. ЗРАЗКИ ВИКОНАННЯ ЗАВДАНЬ. ПІДГОТОВЧІ КУРСИ

Білет № 1-К

3. Розв'язати нерівність $\dfrac{\sqrt{x+4}}{1-x} < 1$.

Розв'язання.

Маємо

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}1-x>0\\ \sqrt{x+4}<1-x\end{cases}\\ \begin{cases}1-x<0\\ \sqrt{x+4}>1-x\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}1-x>0\\ x+4\ge 0\\ x+4<(1-x)^2\end{cases}\\ \begin{cases}1-x<0\\ x+4\ge 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-4\le x<\dfrac{3-\sqrt{21}}{2}\\ x>1\end{array}\right..$$

Відповідь: $x \in \left[-4; \dfrac{3-\sqrt{21}}{2}\right) \cup (1; \infty)$.

4. Розв'язати рівняння $\cos^2(x-30^0)+2\sin(120^0-x)=-1$.

Розв'язання.

Використовуємо формулу зведення:

$\sin(120^0-x)=\sin(90^0+30^0-x)=\cos(30^0-x)=\cos(x-30^0)$.

Робимо заміну $\cos(x-30^0)=t,\ |t|\le 1$. Отримуємо квадратне рівняння $t^2+2t+1=0 \Leftrightarrow t_{1,2}=-1$, тобто $\cos(x-30^0)=-1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x-30^0=180^0+360^0\cdot k,\ k\in Z \Leftrightarrow x=210^0+360^0\cdot k,\ k\in Z$.

Відповідь: $X=\{210^0+360^0\cdot k\},\ k\in Z$.

Білет № 2-К

3. Розв'язати рівняння $\sin^3 x + \cos^3 x + \sin x \cos x = 1$.

Розв'язання. Маємо

$$(\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x) - (1 - \sin x \cos x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 1 - \sin x \cos x = 0 & (1) \\ \sin x + \cos x = 1 & (2) \end{array}\right.$$

В рівнянні (1) отримуємо $\sin 2x = 2$, тобто $x \in \varnothing$.

В рівнянні (2) вводимо допоміжний кут $\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$, звідки

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z.$$

Відповідь: $X = \left\{(-1)^k \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \pi k\right\},\ k \in Z.$

4. Восьмий член арифметичної прогресії складає 40% четвертого, а їх сума дорівнює 2,8. Скільки треба взяти членів цієї прогресії, щоб їх сума дорівнювала 14,3?

Розв'язання.

$a_n = a_1 + (n-1)d;\quad S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$ Складаємо систему

$\begin{cases} a_1 + 7d = \frac{2}{5}(a_1 + 3d) \\ a_1 + 7d + a_1 + 3d = 2{,}8 \end{cases}$, звідки $a_1 = \frac{29}{10},\ d = -\frac{3}{10}$. Підставляємо ці знайдені значення у формулу суми. Отримуємо квадратне рівняння відносно n:

$$3n^2 - 61n + 286 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n_1 = 13 \\ n_2 = \frac{22}{3}\ -\textit{сторонній корінь.} \end{array}\right.$$

Відповідь: $n = 13$.

Білет № 3-К

3. Розв'язати рівняння $\cos^2 x - 3\sin x\cos x + 1 = 0$.

Розв'язання.

Введемо тригонометричну одиницю $1 = \cos^2 x + \sin^2 x$. Отримуємо однорідне тригонометричне рівняння

$$2\cos^2 x - 3\sin x\cos x + \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tg\, x = 1 \\ tg\, x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{\pi}{4} + \pi k, \\ x_2 = arctg\, 2 + \pi k,\ k \in Z \end{array}\right.$$

Відповідь: $X = \left\{\dfrac{\pi}{4} + \pi k;\ arctg\, 2 + \pi k\right\},\ k \in Z.$

4. Розв'язати нерівність $\sqrt{x+5} > \sqrt{x+4} + \sqrt{x+3}$.

Розв'язання.

$$\sqrt{x+5} > \sqrt{x+4} + \sqrt{x+3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+4 \ge 0 \\ x+3 \ge 0 \\ x+5 > x+4+2\sqrt{(x+4)(x+3)} + x+3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -3 \\ 2\sqrt{(x+4)(x+3)} < -x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -3 \\ -x-2 > 0 \\ 4(x+4)(x+3) < (x+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[-3; \frac{-12+2\sqrt{3}}{3}\right).$$

Відповідь: $x \in \left[-3; \dfrac{-12+2\sqrt{3}}{3}\right).$

Білет № 4-К

3. Розв'язати рівняння $\sqrt[3]{x+45}-\sqrt[3]{x-16}=1$.

Розв'язання. Обидві частини рівняння підносимо до куба за формулою $(a-b)^3=a^3-3ab(a-b)-b^3$. Отримуємо

$$x+45-3\sqrt[3]{(x+45)(x-16)}(\sqrt[3]{x+45}-\sqrt[3]{x-16})-x+16=1.$$

Використовуючи умову приклада, маємо $\sqrt[3]{(x+45)(x-16)}=20$,

звідки $\left[\begin{array}{l} x_1=80 \\ x_2=-109. \end{array}\right.$

Перевірка. $x_1=80$: $5-4=1$. $x_2=-109$: $-4+5=1$.

Відповідь: $X=\{80;-109\}$.

4. Між числами 113 і 163 розташувати 9 чисел, які разом з даними складали би арифметичну прогресію.

Розв'язання. Маємо $a_1=113$; $a_{11}=163$. Формула $n-$го члена арифметичної прогресії має вигляд: $a_n=a_1+(n-1)d$. Отримуємо $163=113+10d \Leftrightarrow d=5$.

Відповідь: 118, 123, 128, 133. 138, 143, 148, 153, 158.

Білет № 5-К

3. Знайти область визначення функції

$$y=\sqrt[3]{\frac{10-x}{4-x^2}-\frac{1}{2}}+\sqrt[4]{x+\frac{2}{x}-3}.$$

Розв'язання. $D(f):\begin{cases} x\neq\pm2 \\ x+\dfrac{2}{x}-3\geq0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\neq\pm2 \\ x\neq0 \\ x(x^2-3x+2)\geq0 \end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in(0;1]\cup(2;\infty)$.

Відповідь: $x\in(0;1]\cup(2;\infty)$.

4. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{4}, \\ \sin x \cdot \cos y = 0{,}25. \end{cases}$$

Розв'язання.

Використовуємо формулу перетворення добутку тригонометричних функцій у суму:

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)),$$

отримуємо:

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{4} \\ \dfrac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y)) = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{4} \\ x - y = (-1)^k \arcsin\dfrac{1-\sqrt{2}}{2} + \pi k,\ k \in Z \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{4} + (-1)^k \arcsin\dfrac{1-\sqrt{2}}{2} + \pi k\right\} \\ y = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{4} - (-1)^k \arcsin\dfrac{1-\sqrt{2}}{2} - \pi k\right\},\ k \in Z \end{cases}$$

Відповідь: $\{X, Y\} = \left\{\left(\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{4} + (-1)^k \arcsin\dfrac{1-\sqrt{2}}{2} + \pi k\right);\right.\right.$

$$\left.\left.\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - (-1)^k \arcsin\frac{1-\sqrt{2}}{2} - \pi k\right)\right)\right\},\ \ k \in Z.$$

Білет № 6-К

3. Розв'язати нерівність $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}+3\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}<4.$

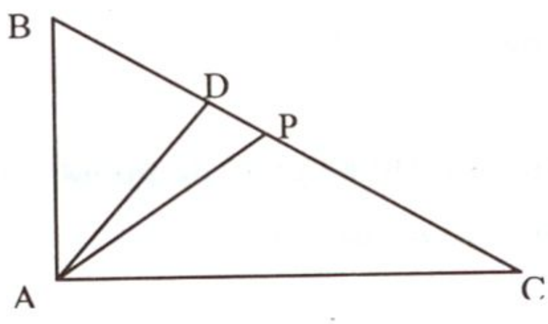
Розв'язання. Робимо заміну $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}=t>0.$ Отримуємо систему

$$\begin{cases} t>0 \\ t+3\cdot\dfrac{1}{t}<4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t>0 \\ t^2-4t+3<0 \end{cases} \Leftrightarrow 1<t<3 \Leftrightarrow 1<\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}<3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1}<9 \\ \dfrac{x+1}{x-1}>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)\left(x-\dfrac{5}{4}\right)>0 \\ x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>\dfrac{5}{4}.$$

Відповідь: $x\in\left(\dfrac{5}{4};\infty\right).$

4. Бісектриса прямого кута трикутника ділить гіпотенузу на відрізки 75 см і 100 см. Обчислити довжину відрізків гіпотенузи, на які її ділить висота, проведена до неї.



Дано:
$\Delta ABC;\ \angle A=90^0;$
$\angle BAP=\angle PAC;\ BP=75\,см;$
$PC=100\,см;\ AD\perp BC.$
Знайти BD і DC.

Розв'язання. Позначимо $AB=x,\ AC=y$ і, використовуючи властивість бісектриси трикутника, складаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2+y^2=175^2 \\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=105\ см \\ y=140\ см. \end{cases}$$

Знайдемо висоту AD.

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot BC = \frac{1}{2} AB \cdot AC$, звідки $AD = 84\,см$.

ΔABD – прямокутний. За теоремою Піфагора знаходимо

$BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = 63\,(см)$

$DC = 175 - 63 = 112\,(см)$.

Відповідь: 63 см і 112 см.

Білет № 7-К

3. Розкласти на множники $(x^2 + x + 4)^2 + 8x(x^2 + x + 4) + 15x^2$.

Розв'язання. $(x^2 + x + 4)^2 + 8x(x^2 + x + 4) + 16x^2 - x^2 =$
$= ((x^2 + x + 4) + 4x)^2 - x^2 = (x^2 + 5x + 4)^2 - x^2 = (x^2 + 5x + 4 - x) \cdot$
$\cdot (x^2 + 5x + 4 + x) = (x^2 + 4x + 4)(x^2 + 6x + 4) = (x+2)^2 (x + 3 + \sqrt{5}) \cdot$
$\cdot (x + 3 - \sqrt{5})$.

Відповідь: $(x+2)^2 (x + 3 + \sqrt{5})(x + 3 - \sqrt{5})$.

4. Розв'язати рівняння $5(1 + \cos x) = 2 + \sin^4 x - \cos^4 x$.

Розв'язання. $5(1 + \cos x) = 2 + \sin^4 x - \cos^4 x \Leftrightarrow 5(1 + \cos x) =$
$= 2 + (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) \Leftrightarrow 5(1 + \cos x) =$
$= 2 + (1 - 2\cos^2 x)$.

Робимо заміну $\cos x = t$, $|t| \le 1$. Одержуємо квадратне рівняння

$$2t^2 + 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = -2 - \textit{сторонній корінь} \\ t_2 = -\dfrac{1}{2} \end{array} \right.$$

Маємо $\cos x = -\frac{1}{2}$, звідки $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$.

Відповідь: $X = \left\{ \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \right\},\ k \in Z$.

Білет № 8-К

3. Розв'язати рівняння $(x+1)(x-2)(x-3)(x-6)=13$.

Розв'язання. Групуємо множники

$(x+1)(x-6)(x-2)(x-3)=13 \Leftrightarrow (x^2-5x-6)(x^2-5x+6)=13$.

Заміна $x^2-5x=t$. Маємо $(t-6)(t+6)=13 \Leftrightarrow t^2-36=13 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow t_{1,2}=\pm 7 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-5x=7 \\ x^2-5x=-7 \end{array}\right. \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{53}}{2}.$$

Відповідь: $X=\left\{\frac{5\pm\sqrt{53}}{2}\right\}$.

4. Розв'язати нерівність $\dfrac{\cos 75^0 \cos 15^0+\sin 75^0 \sin 15^0}{x^2-1}<\dfrac{1}{2}$.

Розв'язання. Враховуючи, що $\cos 75^0 \cos 15^0+\sin 75^0 \sin 15^0=$ $=\cos(75^0-15^0)=\cos 60^0=\dfrac{1}{2}$, отримуємо нерівність $\dfrac{1}{x^2-1}<1$, звідки $(x^2-1)(x^2-2)>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-\sqrt{2})\cup(-1;1)\cup(\sqrt{2};\infty)$.

Відповідь: $x\in(-\infty;-\sqrt{2})\cup(-1;1)\cup(\sqrt{2};\infty)$.

Білет № 9-К

3. Обчислити без таблиць $\cos 20^0\cdot\cos 40^0\cdot\cos 60^0\cdot\cos 80^0$.

Розв'язання. Чисельник і знаменник множимо на $2\sin 20^0$ використовуємо формулу $2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha$. Одержуємо

$$\frac{2\sin 20^0\cdot\cos 20^0\cdot\cos 40^0\cdot\cos 60^0\cdot\cos 80^0}{2\sin 20^0}=$$

$$\frac{\sin 40^0\cdot\cos 40^0\cdot\cos 80^0}{4\sin 20^0}=\frac{\sin 80^0\cdot\cos 80^0}{8\sin 20^0}=\frac{\sin 160^0}{16\sin 20^0}=$$

$$=\frac{\sin(180^0-20^0)}{16\sin 20^0}=\frac{\sin 20^0}{16\sin 20^0}=\frac{1}{16}.$$

Відповідь: $\dfrac{1}{16}$.

4. Розв'язати рівняння $2x^3 - 5x^2 - 5x + 2 = 0$.

Розв'язання. Групуємо доданки:

$$2(x^3 + 1) - 5x(x+1) = 0 \Leftrightarrow 2(x+1)(x^2 - x + 1) - 5x(x+1) \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x + 1 = 0 \\ 2x^2 - 7x + 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -1 \\ x_{2,3} = \dfrac{7 \pm \sqrt{33}}{4}. \end{array}\right.$$

Відповідь: $X = \left\{-1; \dfrac{7 \pm \sqrt{33}}{4}\right\}$.

Білет № 10-К

3. Довести тотожність

$$\sin^2\left(\frac{7\pi}{8} - 2\alpha\right) - \sin^2\left(\frac{9\pi}{8} - 2\alpha\right) = \frac{\sin 4\alpha}{\sqrt{2}}.$$

Розв'язання. Враховуючи формулу пониження степеня $\sin^2 \alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2}$, маємо

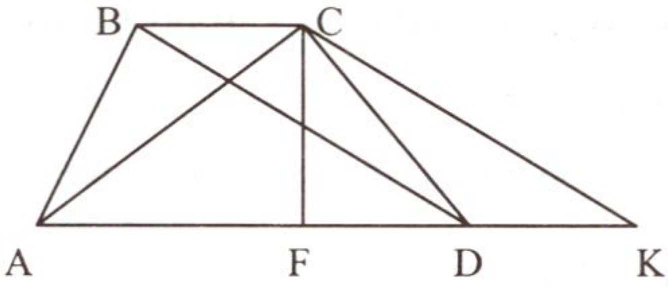
$$\frac{1}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{7\pi}{4} - 4\alpha\right) - 1 + \cos\left(\frac{9\pi}{4} - 4\alpha\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{9\pi}{4} - 4\alpha\right) - \cos\left(\frac{7\pi}{4} - 4\alpha\right)\right) = A.$$

Оскільки $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha - \beta}{2}\sin\dfrac{\alpha + \beta}{2}$, одержуємо

$$A = -\sin\frac{\pi}{4}\sin(2\pi - 4\alpha) = \frac{\sin 4\alpha}{\sqrt{2}}.$$

4. Основи трапеції дорівнюють 3 см і 14 см, а діагоналі – 25 см і 26 см. Знайти висоту трапеції.



Дано:
ABCD – трапеція,
$BC \parallel AD, BC = 3\,см$,
$AD = 14\,см, AC = 25\,см$,
$BD = 26\,см$.
Знайти $CF\ (CF \perp AD)$.

Розв'язання. Проводимо $CK \parallel BD$. За формулою Герона обчислюємо $S_{\Delta ACK}$:

$S_{\Delta ACK} = \sqrt{34 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 17} = 17 \cdot 12 = 204\ (см^2)$.

Але $S_{\Delta ACK} = \frac{1}{2} \cdot CF \cdot AK$, звідки $CF = 24\ см$.

Відповідь: $CF = 24\ см$.

4. ЗРАЗКИ БІЛЕТІВ З МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ПРОВЕДЕННЯ СПІВБЕСІДИ ІЗ ВСТУПНИКАМИ НА ПІДГОТОВЧЕ ВІДДІЛЕННЯ

Білет № 1-В

1. Арифметична та геометрична прогресії. Формули n-го члена і суми n перших членів.
2. Розв'язати рівняння $\cos^2 4x + 3\sin^2 2x - 1 = 0$.
3. Розв'язати нерівність $10^x - 8\cdot 5^x - 5\cdot 2^x + 40 \leq 0$.
4. Сторони трикутника дорівнюють 24 см і 40 см, а кут між ними – 120^0. Знайти відрізки, на які бісектриса даного кута ділить третю сторону.

Білет № 2-В

1. Формули площ трикутника, паралелограма, трапеції.
2. Розв'язати рівняння $x^{\frac{\lg x+5}{3}} = 10^{5+\lg x}$.
3. Знайти найменше значення $tg\frac{x}{2}$, якщо x – корінь рівняння $\sin x + 2\cos x = 1$.
4. Знайти область визначення функції
$$y = \sqrt{|2x-1| - |x+2|} + \sqrt[3]{\frac{x+1}{3x^2 - 8x - 3}}.$$

Білет № 3-В

1. Показникова функція $y = a^x$, її властивості та графік.
2. Обчислити довжину вектора $2\vec{a} + 3\vec{b}$, якщо $\vec{a} = (-1; 1; -1)$, $\vec{b} = (2; -2; 2)$.
3. Знайти найбільший від'ємний корінь рівняння
$$1 - \sin 2x = (\sin 2x + \cos 2x)^2.$$
4. Сторони трикутника ABC дорівнюють 10 см, 17см і 21 см. Із вершини більшого кута трикутника до його площини проведено перпендикуляр AD, який дорівнює 15 см. Знайти відстань від точки D до сторони BC трикутника.

Білет № 4-В

1. Види трикутників. Ознаки рівності трикутників.
2. Розв'язати рівняння $\log_4 x + \log_{\frac{1}{16}} x + \log_8 x^3 = 5$.
3. Спростити вираз $\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\alpha}{4}\right) - \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\alpha}{4}\right) \cdot tg\dfrac{\pi}{8}}{\sin\left(\dfrac{7\pi}{2} - \dfrac{\alpha}{4}\right) + \sin\left(\dfrac{\alpha}{4} - 3\pi\right) \cdot tg\dfrac{\pi}{8}}$.
4. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7, \ x \in [0; 2]$.

Білет № 5-В

1. Логарифмічна функція, її властивості та графік.
2. Не розв'язуючи рівняння $2x^2 - 5x + 2 = 0$, знайти $x_1^3 + x_2^3$, де x_1, x_2 –корені даного рівняння.
3. Довести тотожність
$$ctg\left(4\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) + \frac{1}{\cos(4\alpha - 3\pi)} = ctg\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right).$$
4. У рівнобедреному трикутнику основа дорівнює 30 см, а бічна сторона – 39 см. Визначити радіус вписаного кола.

Білет № 6-В

1. Формула коренів квадратного рівняння. Розкладання квадратного тричлена на лінійні множники.
2. Побудувати графіки функцій:
$$a)\ y = \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2}; \quad б)\ y = \log_2 \frac{x^2 - 4}{x + 2}.$$
3. Розв'язати рівняння $\cos 2x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x + \sin^2 x = 0$.
4. Три числа, з яких третє дорівнює 12, утворюють геометричну прогресію. Якщо замість 12 взяти 9, то ці три числа будуть утворювати арифметичну прогресію. Знайти ці числа.

Білет № 7-В

1. Похідна функції. Механічний та геометричний зміст похідної.
2. Обчислити $\sin(\alpha+\beta)$, якщо $\sin\alpha = \frac{3}{5}, \cos\beta = -\frac{12}{13}$, $90^0 < \alpha < 180^0,\ 180^0 < \beta < 270^0$.
3. Розв'язати нерівність $(x-3)\sqrt{x^2+4} \le x^2 - 9$.
4. Перпендикуляр, проведений з вершини тупого кута рівнобічної трапеції на більшу основу, ділить її на відрізки 25 см і 7 см. Обчислити радіус вписаного кола.

Білет № 8-В

1. Вектори. Операції над векторами.
2. Побудувати графік функції $y = \max\{x-2; 6-x-x^2\}$.
3. При яких значеннях x похідна функції $y = 3(\sin x + \sqrt{3}\cos x) - \sin 3x$ дорівнює нулю?
4. Кінці більшої бічної сторони прямокутної трапеції віддалені від центра вписаного у неї кола на 15 см і 20 см. Обчислити периметр трапеції.

Білет № 9-В

1. Логарифми та їх властивості. Основна логарифмічна тотожність.
2. Знайти найбільше та найменше значення виразу $5\cos\alpha + 12\sin\alpha$.
3. Розв'язати нерівність $f'(x) < g'(x)$, якщо $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$, $g(x) = \frac{x+2}{x+1}$.
4. Висота, проведена до основи рівнобедреного трикутника, дорівнює 32 см. Бічна сторона точкою дотику вписаного у трикутник кола ділиться у відношенні 2:3, починаючи від вершини, яка протилежна основі. Обчислити радіус вписаного кола.

Білет № 10-В

1. Коло і круг, їх основні елементи. Пропорційні відрізки у колі.
2. Знайти $\sin^3\alpha - \cos^3\alpha$, якщо $\sin\alpha - \cos\alpha = m$.
3. Розв'язати нерівність $\log_5^3(x+1)^2 + 8\log_5^2(x+1) < 16$.
4. Знайти a_1 і q нескінченної спадної геометричної прогресії, у якої $S = 9$, а сума квадратів її членів дорівнює 40,5.

Білет № 11-В

1. Означення і основні властивості тригонометричних функцій: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tg\, x$. Їх графіки.
2. Розв'язати рівняння $\dfrac{3 - \log_3(5x+2)}{\log_3(x-4)} = 1$.
3. Відрізок, проведений з вершини прямого кута до середини гіпотенузи прямокутного трикутника, дорівнює 15 см, а різниця катетів – 6 см. Обчислити периметр трикутника.
4. Розв'язати рівняння та нерівності:

$$а)\sqrt{2x^2 - 3x + 5} \le -3;\quad б)\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$в)\ 2x^3 - 2x = 0;\qquad г)\frac{1}{x+1} < 1.$$

Білет № 12-В

1. Ознаки рівності прямокутних трикутників.
2. Обчислити $tg\,18^0 \cdot tg\,288^0 + \sin 32^0 \cdot \sin 148^0 - \sin 302^0 \cdot \sin 122^0$.
3. Розв'язати нерівність $\sqrt{2x^2 + 5x - 6} < 2 - x$.
4. Розв'язати рівняння:

$$а)\cos x = -\frac{1}{2};\ б)\ \lg(x-1) + \lg(x+1) = 3\lg 2 + \lg(x-2).$$

Білет № 13-В

1. Формули перетворення суми тригонометричних функцій у добуток і навпаки.
2. Морська вода містить 5% солі (по масі). Скільки прісної води треба додати до 40 г морської води, щоб вміст солі в останній становив 2%?
3. Розв'язати рівняння та нерівності: $а)\, 5x^2 - x - 6 = 0;$

$$б)\, \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2};\ \ в)\, \sqrt{4x-3} = -2;\ \ г)\, |x-5| \le 1.$$

4. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$ на проміжку $[-2;\, 2]$.

Білет № 14-В

1. Похідна суми, добутку і частки двох функцій.
2. В рівнобедреному трикутнику основа дорівнює 30 см, а висота – 20 см. Визначити висоту, проведену на бічну сторону.
3. Знайти найбільше значення функції $y = 1 + 12x - x^3$ на проміжку $[-3;\, 3]$.
4. Розв'язати рівняння та нерівності $а)\, \frac{x^2-1}{x-1} = 0;$

$$б)\, \left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3};\ \ \ в)\, \log_2^2 x - \log_2 x^2 \ge 3.$$

Білет № 15-В

1. Види трикутників. Ознаки подібності трикутників.
2. Дано трикутник АВС. Пряма MN паралельна основі BC, причому $|AM| : |MB| = 3 : 4,\ |MN| = 12\,см.$ Визначити $|BC|$.
3. Розв'язати рівняння $2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin 2x = 0.$
4. Знайти інтервали монотонності функції $y = (x^2 - 2)(x^2 + 3)$.

Білет № 16-В

1. Знаходження екстремумів функції.
2. Обчислити $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$, якщо $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$.
3. Розв'язати нерівність $x+4<\dfrac{2x+1}{x-1}$.
4. У рівнобедреній трапеції, описаній навколо кола, основи дорівнюють 36 см та 1 см. Визначити радіус кола.

Білет № 17-В

1. Знаходження найбільшого та найменшого значень функції на заданому проміжку.
2. Довести тотожність $\dfrac{\sin^2\alpha}{1+ctg^2\alpha\cdot(\cos^2\alpha-1)}=1$.
3. Розв'язати нерівність $x^2+|x-4|+5x-3\le 0$.
4. Бічне ребро правильної трикутної піраміди дорівнює $\sqrt{72}$ см та складає з площиною основи кут α, який дорівнює 45^0. Знайти об'єм піраміди.

Білет № 18-В

1. Поняття функції. Способи задання функції. Рівняння дотичної до графіка функції.
2. Розв'язати рівняння $x-5\sqrt{x}-84=0$. .
3. Довести, що вираз $\sin(250^0+\alpha)\cdot\cos(200^0-\alpha)-\cos 240^0\cdot\cos(220^0-2\alpha)$ не залежить від α.
4. У рівнобедреній трапеції одна основа дорівнює 40 см, інша 24см. Діагоналі взаємоперпендикулярні. Знайти площу трапеції.

Білет № 19-В

1. Достатня умова зростання (спадання) функції на проміжку. Поняття екстремуму функції.
2. Розкласти на множники $(x^2+2x)^2+3(x^2+2x)+2$.
3. Знайти $\sin(\alpha-\beta)$, якщо $\cos\alpha=0.5$, $\sin\beta=-0.4$, $\alpha\in\left(\frac{3}{2}\pi;2\pi\right)$, $\beta\in\left(\pi;\frac{3}{2}\pi\right)$.
4. Обчислити катети прямокутного трикутника, якщо їх відношення дорівнює 20:21, а різниця між радіусами описаного та вписаного кіл дорівнює 17 см.

Білет № 20-В

1. Формули додавання аргументів тригонометричних функцій $\sin(\alpha\pm\beta)$, $\cos(\alpha\pm\beta)$, $tg(\alpha\pm\beta)$.
2. Побудувати графіки функцій:

$$а)\ y=|x-1|(x+1);\ \ б)\ y=|x^2-3x+2|.$$

3. Навколо кола радіуса r описано прямокутну трапецію, менша із сторін якої дорівнює 1,5 r. Визначити площу трапеції.
4. Скласти рівняння дотичної до графіка функції $y=x(\ln x-1)$ у точці $x_0=e$.

5. ЗРАЗКИ ВИКОНАННЯ ЗАВДАНЬ. ПІДГОТОВЧЕ ВІДДІЛЕННЯ

Білет № 1-В

3. Розв'язати нерівність $10^x - 8 \cdot 5^x - 5 \cdot 2^x + 40 \le 0$.

Розв'язання. Групуємо доданки

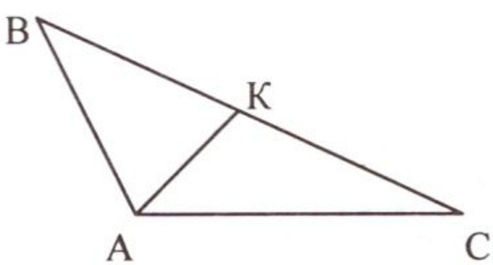
$$(10^x - 8 \cdot 5^x) - (5 \cdot 2^x - 40) \le 0 \Leftrightarrow$$

$$5^x(2^x - 8) - 5(2^x - 8) \le 0 \Leftrightarrow (2^x - 8)(5^x - 5) \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2^x - 8 \le 0 \\ 5^x - 5 \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2^x - 8 \ge 0 \\ 5^x - 5 \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le 3 \\ x \ge 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 3 \\ x \le 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow 1 \le x \le 3.$$

Відповідь: $x \in [1; 3]$.

4. Сторони трикутника дорівнюють 24 см і 40 см, а кут між ними – 120^0. Знайти відрізки, на які бісектриса даного кута ділить третю сторону.



Дано: ΔABC; $AB = 24\,см$,

$AC = 40\,см$, $\angle CAB = 120^0$,

$\angle KAB = \angle CAK$.

Знайти BK і KC.

Розв'язання. Використовуємо теорему косинусів, знаходимо сторону BC, враховуючи, що

$$\cos 120^0 = \cos(90^0 + 30^0) = -\sin 30^0 = -\frac{1}{2}.$$

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos 120^0} = \sqrt{576 + 1600 + 960} =$$
$$= 56\,(см).$$

Скориставшись властивістю бісектриси кута трикутника, складаємо систему

$$\begin{cases} \dfrac{BK}{KC} = \dfrac{AB}{AC} \\ BK + KC = BC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{BK}{KC} = \dfrac{3}{5} \\ BK + KC = 56 \end{cases} \Leftrightarrow BK = 21\,см,\ KC = 35\,см.$$

Відповідь: 21 см; 35 см.

Білет № 2-В

3. Розв'язати рівняння $x^{\frac{\lg x+5}{3}} = 10^{5+\lg x}$.

Розв'язання.

$D(f): x > 0$.

Логарифмуємо обидві частини рівняння за основою 10:

$\dfrac{\lg x+5}{3} \cdot \lg x = 5 + \lg x.$ Робимо заміну $\lg x = t$. Одержуємо квадратне рівняння $t^2 + 2t - 15 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = -5 \\ t_2 = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lg x = -5 \\ \lg x = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 10^{-5} \\ x_2 = 10^{3} \end{array}\right.$.

Відповідь: $X = \{10^{-5}; 10^{3}\}$.

4. Знайти область визначення функції

$$y = \sqrt{|2x-1| - |x+2|} + \sqrt[3]{\frac{x+1}{3x^2 - 8x - 3}}.$$

Розв'язання:

$$D(f): \begin{cases} |2x-1| - |x+2| \geq 0 \\ 3x^2 - 8x - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |2x-1| \geq |x+2| \\ x \neq -\dfrac{1}{3} \\ x \neq 3 \end{cases}.$$

Використаємо еквівалентність нерівностей $|f(x)| \geq |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) \geq g^2(x)$, отримаємо систему

$$\begin{cases} (2x-1)^2 \ge (x+2)^2 \\ x \ne -\dfrac{1}{3} \\ x \ne 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 8x - 3 \ge 0 \\ x \ne -\dfrac{1}{3} \\ x \ne 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; -\frac{1}{3}) \cup (3; \infty).$$

Відповідь: $x \in (-\infty; -\frac{1}{3}) \cup (3; \infty)$.

Білет № 3-В

3. Знайти найбільший від'ємний корінь рівняння

$1 - \sin 2x = (\sin 2x + \cos 2x)^2$.

Розв'язання.

$1 - \sin 2x = (\sin 2x + \cos 2x)^2 \Leftrightarrow 1 - \sin 2x =$

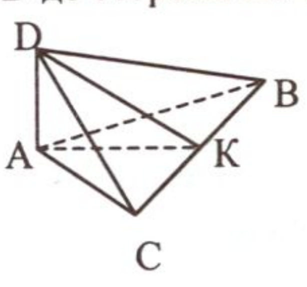
$= \sin^2 2x + 2\sin 2x \cos 2x + \cos^2 2x \Leftrightarrow \sin 2x \cdot (1 + 2\cos 2x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0 \\ \cos 2x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{\pi k}{2} \\ x_2 = \pm\dfrac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z \end{array}\right.$$

Найбільший від'ємний корінь $x = -\frac{\pi}{3}$.

Відповідь: $x = -\frac{\pi}{3}$.

4. Сторони трикутника ABC дорівнюють 10 см, 17 см і 21 см. Із вершини більшого кута трикутника до його площини проведено перпендикуляр AD, який дорівнює 15 см. Знайти відстань від точки D до сторони BC трикутника.



Дано: ΔABC, $AC = 10\,см$, $AB = 17\,см$

$BC = 21\,см$, $AD \perp пл. ABC$,

$AD = 15\,см$.

Знайти DK.

Розв'язання. Проводимо $AK \perp BC$. З'єднуємо точки D і K, тоді за оберненою теоремою до теореми про три перпендикуляри маємо: $DK \perp BC$. За формулою Герона знаходимо площу ΔABC:

$S_{\Delta ABC} = \sqrt{24 \cdot 14 \cdot 7 \cdot 3} = 84\,(см^2)$.

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} AK \cdot BC$, *звідки* $AK = 8\,см$.

З прямокутного ΔADK за теоремою Піфагора знаходимо DK:

$DK = \sqrt{AK^2 + AD^2} = \sqrt{64 + 225} = 17\,(см)$.

Відповідь: 17 см.

Білет № 4-В

3. Розв'язати рівняння $\log_4 x + \log_{\frac{1}{16}} x + \log_8 x^3 = 5$.

Розв'язання.

$D(f): x > 0$.

За формулою перехода до нової основи $\log_a N = \dfrac{\log_b N}{\log_b a}$, $a > 0, a \neq 1, N > 0, b > 0, b \neq 1$ в усіх доданках переходимо до основи 2. Використовуючи властивості логарифмів, отримуємо:

$\dfrac{1}{2}\log_2 x - \dfrac{1}{4}\log_2 x + \log_2 x = 5 \Leftrightarrow \log_2 x = 4 \Leftrightarrow x = 2^4 = 16$.

Відповідь: $X = \{16\}$.

4. Знайти найбільше і найменше значення функції

$$y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7,\ x \in [0; 2]$$

Розв'язання. Маємо $y' = 6x^2 + 6x - 12$. Знайдемо критичні точки функції. Для цього досить розв'язати рівняння $y' = 0$, тобто

$6x^2 + 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -2 \\ x_2 = 1 \end{array}\right.$.

З двох знайдених точок заданому проміжку належить лише $x_2 = 1$. Тепер потрібно знайти значення функції на кінцях проміжку $[0; 2]$, в точці $x = 1$ і порівняти отримані результати. Маємо:

$y(0)=7;\ y(1)=0;\ y(2)=11$. Отже, $y_{найм}=0,\ y_{найб}=11$.

Відповідь: $y_{найм}=0,\ y_{найб}=11$.

Білет № 5-В

3. Довести тотожність

$$ctg\left(4\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)+\frac{1}{\cos(4\alpha-3\pi)}=ctg\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right).$$

Розв'язання.

$$ctg\left(4\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)+\frac{1}{\cos(4\alpha-3\pi)}=-ctg\left(\frac{3\pi}{2}-4\alpha\right)+\frac{1}{\cos(\pi-4\alpha)}=$$

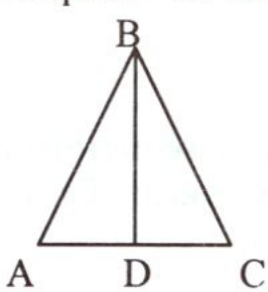
$$=-tg\,4\alpha-\frac{1}{\cos 4\alpha}=-\frac{\sin 4\alpha+1}{\cos 4\alpha}=$$

$$=-\frac{2\sin 2\alpha\cos 2\alpha+\cos^2 2\alpha+\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha}=$$

$$=-\frac{(\cos 2\alpha+\sin 2\alpha)^2}{(\cos 2\alpha+\sin 2\alpha)(\cos 2\alpha-\sin 2\alpha)}=$$

$$=\frac{\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha-\cos 2\alpha}=\frac{\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}=ctg\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$$

4. У рівнобедреному трикутнику основа дорівнює 30 см, а бічна сторона – 39 см. Визначити радіус вписаного кола.



Дано: ΔABC, $AB=BC=39\,см$, $AC=30\,см$.

Знайти r.

Розв'язання.

Проводимо $BD\perp AC$, BD – висота, медіана, бісектриса. За теоремою Піфагора з ΔDBC знаходимо BD:

$$BD = \sqrt{BC^2 - DC^2} = \sqrt{39^2 - 15^2} = 36\,см.$$

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} BD \cdot AC = p \cdot r,\;\; p = 54\,см,\;\; \dfrac{1}{2} \cdot 36 \cdot 30 = 54 \cdot r,$ звідки $r = 10\,см.$

Відповідь: $r = 10\,см.$

Білет № 6-В

3. Розв'язати рівняння

$$\cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x + \sin^2 x = 0.$$

Розв'язання.

$$\cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x + \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x - \sqrt{3}\cos x \sin x +$$

$$+ \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \;\; (1) \\ \cos x - \sqrt{3}\sin x = 0 \;\; (2) \end{array}\right.$$

З рівняння (1) маємо $x_1 = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\;\; k \in Z.$ Рівняння (2) – однорідне.

Очевидно $\cos x \neq 0$, ділимо доданки на $\cos x$:

$$1 - \sqrt{3}tgx = 0 \Leftrightarrow tgx = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x_2 = \frac{\pi}{6} + \pi k,\;\; k \in Z.$$

Відповідь: $X = \left\{ \dfrac{\pi}{2} + \pi k, \dfrac{\pi}{6} + \pi k \right\},\;\; k \in Z.$

4. Три числа з яких третє дорівнює 12, утворюють геометричну прогресію. Якщо замість 12 взяти 9, то ці три числа будуть утворювати арифметичну прогресію. Знайти ці числа.

Розв'язання. Маємо:

$$\div\div\, a,\;\; aq,\;\; 12$$

$$\div\, a,\;\; aq,\;\; 9.$$

Використовуючи характеристичні властивості прогресій, складаємо систему:

$$\begin{cases} aq = \sqrt{12 \cdot a} \\ aq = \dfrac{a+9}{2} \end{cases}, \text{звідки} \sqrt{12a} = \frac{a+9}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a^2 - 30a + 81 = 0 \ (a > 0) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 27 \\ a = 3 \end{array}\right.$. Якщо $a = 27$, то $q = \dfrac{a+9}{2a} = \dfrac{2}{3}$, якщо $a = 3$, то $q = 2$.

Заходимо числа: 27, 18, 12 або 3, 6, 12.

Відповідь: 27, 18, 12 або 3, 6, 12.

Білет № 7-В

Розв'язати нерівність $(x-3)\sqrt{x^2+4} \le x^2 - 9$.

Розв'язання. Перепишемо дану нерівність у вигляді:

$(x-3)(\sqrt{x^2+4} - x - 3) \le 0$.

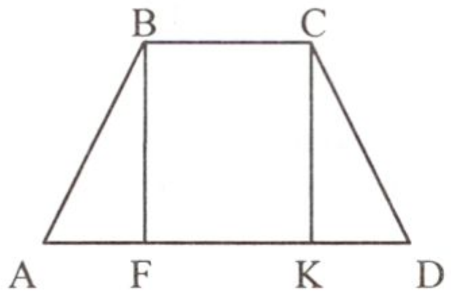
Отримана нерівність еквівалентна сукупності двох систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - 3 \ge 0 \\ \sqrt{x^2+4} - x - 3 \le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x - 3 \le 0 \\ \sqrt{x^2+4} - x - 3 \ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 3 \\ \sqrt{x^2+4} \le x + 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x \le 3 \\ \sqrt{x^2+4} \ge x + 3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 3 \\ x^2 + 4 \le x^2 + 6x + 9 \end{cases} \\ \begin{cases} -3 \le x \le 3 \\ x^2 + 4 \ge x^2 + 6x + 9 \end{cases} \\ \begin{cases} x < -3 \\ x \in R \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{5}{6}\right] \cup [3; \infty).$$

Відповідь: $x \in \left(-\infty; -\dfrac{5}{6}\right] \cup [3; \infty)$.

4. Перпендикуляр, проведений з вершини тупого кута рівнобічної трапеції на більшу основу, ділить її на відрізки 25 см і 7 см. Обчислити радіус вписаного кола.



Дано: $ABCD$ – *трапеція*,
$AB = CD$, $BF \perp AD$,
$AF = 7\,см$, $FD = 25\,см$.
Знайти r.

Розв'язання. Проводимо $CK \perp AD$. $\Delta ABF = \Delta KCD$ (за гіпотенузою і гострим кутом), звідси $KD = 7\,см$. Маємо $BC = FK = 25 - 7 = 18\,(см)$.

Оскільки у трапецію можна вписати коло, то $BC + AD = 2AB$ (властивість описаного чотирикутника). Знаходимо бічну сторону $AB = \dfrac{BC + AD}{2} = \dfrac{32 + 18}{2} = 25\,(см)$. $BF = 2r$. З прямокутного ΔABF за теоремою Піфагора знаходимо $BF = \sqrt{AB^2 - AF^2} =$ $= 24\,(см)$, отже $r = 12\,см$.

Відповідь: $r = 12\,см$.

Білет № 8-В

3. При яких значеннях x похідна функції $y = 3(\sin x + \sqrt{3}\cos x) -$ $- \sin 3x$ дорівнює нулю?

Розв'язання.

$y' = 3(\cos x - \sqrt{3}\sin x) - 3\cos 3x = 0 \Leftrightarrow \cos x - \sqrt{3}\sin x - \cos 3x = 0$

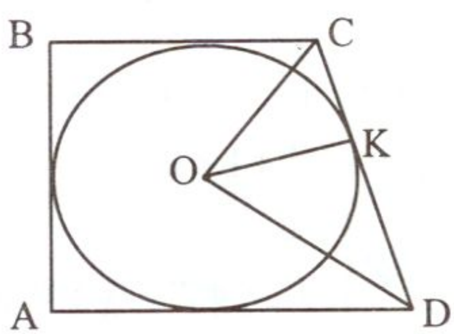
Групуємо доданки і перетворюємо різницю косинусів у добуток

$$2\sin 2x \sin x - \sqrt{3}\sin x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin 2x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \pi k,\ k \in Z \\ x_2 = (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi k}{2}, k \in Z. \end{array} \right.$$

Відповідь: $X = \left\{ \pi k;\ (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi k}{2} \right\},\ k \in Z.$

4. Кінці більшої бічної сторони прямокутної трапеції віддалені від центра вписаного в неї кола на 15 см і 20 см. Обчислити периметр трапеції.



Дано: $ABCD$ – трапеція,
$AB \perp AD, OC = 15\,см,$
$OD = 20\,см.$

Знайти P_{ABCD}

Розв'язання.

OC і OD - бісектриси кутів C і D. Оскільки $\angle C + \angle D = 180^0$, то $\angle OCD + \angle ODC = 90^0$. Сума кутів трикутника дорівнює 180^0, отже $\angle DOC = 90^0$. За теоремою Піфагора у ΔOCD знаходимо $CD = \sqrt{OC^2 + OD^2} = 25\,(см)$.

$S_{\Delta OCD} = \dfrac{1}{2} OC \cdot OD = \dfrac{1}{2} OK \cdot CD$, звідки $OK = r = \dfrac{OC \cdot OD}{CD} =$ $= 12\,(см)$.

$AB = 2r = 24\,см.$

Використовуємо властивість описаного чотирикутника:

$AB + CD = BC + AD = 24 + 25 = 49\,(см).$

Отже $P_{ABCD} = 98\,см.$

Відповідь: $P_{ABCD} = 98\,см.$

Білет № 9-В

Розв'язати нерівність $f'(x) < g'(x)$, якщо $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$, $g(x) = \frac{x+2}{x+1}$.

Розв'язання. Маємо $f'(x) = x+1, g'(x) = \frac{x+1-x-2}{(x+1)^2} = \frac{-1}{(x+1)^2}$, $\left(\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}\right)$. Отримуємо нерівність

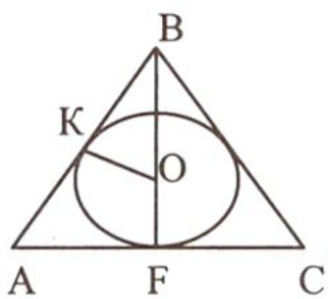
$$x+1 < \frac{-1}{(x+1)^2} \Leftrightarrow \frac{(x+1)^3+1}{(x+1)^2} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ (x+1)^3 + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ (x+1+1)((x+1)^2 - (x+1) + 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ (x+2)(x^2+x+1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x < -2.$

Відповідь: $x \in (-\infty; -2)$.

4. Висота, проведена до основи рівнобедреного трикутника, дорівнює 32 см. Бічна сторона точкою дотику вписаного у трикутник кола ділиться у відношенні 2:3, починаючи від вершини, яка протилежна основі. Обчислити радіус вписаного кола.



Дано: ΔABC, $AB = BC$, $BF \perp AC$,

$BF = 32\,см$, $\frac{KB}{AK} = \frac{2}{3}$.

Знайти r.

Розв'язання.

Оскільки ΔABC - рівнобедрений, то BF – висота, бісектриса, медіана. Центр вписаного кола знаходиться в точці перетину бісектрис, отже O – центр вписаного кола. K – точка дотику бічної сторони. Позначимо $KB = 2x$, $AK = 3x$. Тоді $AK = AF = 3x$, як відрізки дотичних, проведених з однієї точки A до кола. В прямокутному ΔABF використовуємо теорему Піфагора:

$$25x^2 = 9x^2 + 32^2 \Leftrightarrow 16x^2 = 32^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 8 \\ x = -8 - \textit{сторонній корінь.} \end{array}\right.$$

Обчислюємо сторони ΔABC:

$AB = 40\,см$, $AC = 48\,см$.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot BF \cdot AC = p \cdot r \Leftrightarrow r = \frac{32 \cdot 48}{2 \cdot 64} = 12\,(см).$$

Відповідь: 12 см.

Білет № 10-В

3. Розв'язати нерівність $\log_5^3(x+1)^2 + 8\log_5^2(x+1) < 16$.

Розв'язання.

$\log_5^3(x+1)^2 + 8\log_5^2(x+1) < 16 \Leftrightarrow 8\log_5^3(x+1) + 8\log_5^2(x+1) -$

$-16 < 0 \Leftrightarrow \log_5^3(x+1) + \log_5^2(x+1) - 2 < 0.$

Позначимо $\log_5(x+1) = t$, тоді маємо нерівність

$t^3 + t^2 - 2 < 0 \quad (1).$

Знаходимо корені лівої частини нерівності (1). Очевидно $t_1 = 1$. Використовуємо схему Горнера

	1	1	0	-2
1	1	2	2	0

Квадратний тричлен $t^2 + 2t + 2$ має $D < 0$. Отже ліву частину нерівності (1) можна розкласти на множники

$(t-1)(t^2 + 2t + 2) < 0 \Leftrightarrow t < 1.$

Маємо $\log_5(x+1) < 1 \Leftrightarrow 0 < x + 1 < 5 \Leftrightarrow -1 < x < 4.$

Відповідь: $x \in (-1; 4)$.

4. Знайти a_1 і q нескінченної спадної геометричної прогресії, у якої $S = 9$, а сума квадратів її членів дорівнює 40,5.

Розв'язання

Складаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{a_1}{1-q} = 9 \\ \dfrac{a_1^2}{1-q^2} = 40{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a_1}{1-q} = 9 \\ \dfrac{a_1}{1+q} \cdot 9 = 40{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 9(1-q) & (1) \\ \dfrac{9(1-q)}{1+q} = \dfrac{9}{2} & (2) \end{cases}$$

З рівняння (2) маємо $2(1-q) = 1+q \Leftrightarrow q = \dfrac{1}{3}$. Підставляємо це значення в рівняння (1) і знаходимо $a_1 = 6$.

Відповідь: $a_1 = 6$, $q = \dfrac{1}{3}$.

6. ПРОГРАМА З МАТЕМАТИКИ, РЕКОМЕНДОВАНА МІНІСТЕРСТВОМ ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЛЯ ВСТУПНИКІВ ДО ВИЩИХ НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДІВ

Програма з математики до вищих навчальних закладів складається з трьох розділів.

Перший з них є переліком основних математичних понять і фактів, якими повинен володіти вступник і вміти правильно їх використовувати при розв'язанні задач.

У другому розділі вказано основні формули і теореми з алгебри, початку аналізу та геометрії. Вони необхідні абітурієнту для аналізу функцій і побудови графіків, при розв'язуванні задач на вступних випробуваннях..

У третьому розділі перелічені основні математичні вміння і навички, якими повинен володіти вступник.

I. ОСНОВНІ МАТЕМАТИЧНІ ПОНЯТТЯ І ФАКТИ

Арифметика, алгебра і початки аналізу

1. Натуральні числа (*N*). Прості та складені числа. Дільник, кратне. Найбільший спільний дільник. Найменше спільне кратне.
2. Ознаки подільності на 2, 3, 5, 9, 10.
3. Цілі числа (*Z*). Раціональні числа (*Q*). Їх додавання, віднімання, множення і ділення. Порівняння раціональних чисел.
4. Дійсні числа (*R,),* їх запис у вигляді десяткового дробу.
5. Зображення чисел на прямій. Модуль числа, його геометричний зміст.
6. Числові вирази. Вирази із змінними.
7. Степінь з натуральним і раціональним показником. Арифметичний корінь та його властивості.
8. Логарифми, їх властивості.
9. Одночлен і многочлен. Дії над ними. Формули скороченого множення.
10. Многочлен з однією змінною. Корінь многочлена (на прикладі квадратного тричлена).

11. Поняття функції. Способи задання функції. Область визначення, область значень функції. Функція, обернена до даної.
12. Графік функції. Зростання і спадання функції, періодичність, парність, непарність функції.
13. Достатня умова зростання (спадання) функції на проміжку. Поняття екстремуму функції. Необхідна умова екстремуму функції (теорема Ферма). Достатня умова екстремуму. Найбільше і найменше значення функції на проміжку.
14. Означення і основні властивості функцій: лінійної $y = ax + b$, квадратичної $y = ax^2 + bx + c$, степеневої $y = ax^n$ $(n \in Z)$, показникової $y = a^x, a > 0$, логарифмічної $y = \log_a x$, тригонометричних: $y = \cos x$, $y = \sin x$, $y = tgx$.
15. Рівняння. Розв'язування рівнянь, корені рівняння. Рівносильні рівняння. Графік рівняння з двома змінними.
16. Нерівності. Розв'язування нерівностей, Рівносильні нерівності.
17. Системи рівнянь і системи нерівностей. Розв'язування систем. Корені системи. Рівносильні системи рівнянь.
18. Арифметична і геометрична прогресії. Формули *n*-го члена і суми *n*-перших членів прогресії.
19. Синус і косинус суми та різниці двох аргументів (формули).
20. Перетворення в добуток сум $\sin\alpha \pm \sin\beta$, $\cos\alpha \pm \cos\beta$.
21. Означення похідної, її фізичний та геометричний зміст.
22. Похідні суми, добутку, частки та функцій: $y = kx + b$, $y = \cos x$, $y = \sin x$, $y = tg\,x$, $y = x^n$, $де\ n \in N$.

Геометрія

1. Пряма, промінь, відрізок, ламана; довжина відрізка. Кут, величина кута. Вертикальні та суміжні кути. Паралельні прямі. Відношення площ подібних фігур. Рівність і подібність геометричних фігур.
2. Приклади перетворення геометричних фігур, види симетрії.
3. Вектори. Операції над векторами.
4. Многокутник. Вершини, сторони, діагоналі многокутника.

5. Трикутник. Медіана, бісектриса, висота трикутника, їх властивості. Види трикутників. Співвідношення між сторонами та кутами прямокутного трикутника.
6. Чотирикутник: паралелограм, прямокутник, ромб, квадрат, трапеція, їх основні властивості.
7. Коло і круг. Центр, діаметр, радіус, хорда, січна. Залежність між відрізками у колі. Дотична до кола. Дуга кола. Сектор, сегмент.
8. Центральні і вписані кути, їх властивості.
9. Формули площ геометричних фігур: трикутника, прямокутника, паралелограма, квадрата, ромба, трапеції.
10. Довжина кола та довжина дуги кола. Радіанна міра кута. Площа круга і площа сектора.
11. Площина. Паралельні площини та площини, що перетинаються.
12. Паралельність прямої і площини.
13. Кут прямої з площиною. Перпендикуляр до площини.
14. Двогранні кути. Лінійний кут двогранного кута. Перпендикулярність двох площин.
15. Многогранники. Вершини, ребра, грані, діагоналі многогранника. Пряма і похила призми; піраміда. Правильна призма і правильна піраміда. Паралелепіпеди, їх види.
16. Тіла обертання: циліндр, конус, сфера, куля. Центр, діаметр, радіус сфери і кулі. Площина, дотична до сфери.
17. Формули площ поверхонь і об'ємів призми, піраміди, циліндра, конуса.
18. Формули об'єму кулі та її частин і формула площі поверхні сфери.

II. ОСНОВНІ ФОРМУЛИ І ТЕОРЕМИ

Алгебра і початки,аналізу

1. Функція $y = ax + b$, її властивості, графік.
2. Функція $y = \frac{k}{x}$, її властивості, графік.
3. Функція $y = ax^2 + bx + c$, її властивості, графік.
4. Формула коренів квадратного рівняння.
5. Розкладання квадратного тричлена на лінійні множники.

6. Властивості числович нерівностей.
7. Логарифм добутку, степеня, частки.
8. Функції $y = \cos x$, $y = \sin x$, $y = tg\, x$, їх означення, властивості, графіки.
9. Розв'язки рівнянь $\cos x = a$, $\sin x = a$, $tg\, x = a$.
10. Формули зведення.
11. Залежність між тригонометричними функціями одного й того ж аргументу.
12. Тригонометричні функції подвійного аргументу.
13. Похідна суми, добутку і частки двох функцій, степеневої функції.
14. Рівняння дотичної до графіка функції.
15. Похідні тригонометричних функцій, показникової і логарифмічної функцій.

Геометрія

1. Властивості рівнобедреного трикутника.
2. Властивості точок, рівновіддалених від кінців відрізка.
3. Ознаки паралельності прямих.
4. Сума кутів трикутника. Сума внутрішніх кутів опуклого многокутника.
5. Ознаки паралелограма.
6. Коло, описане навколо трикутника.
7. Коло, вписане в трикутник.
8. Дотична до кола та її властивість.
9. Вимірювання кута, вписаного в коло.
10. Ознаки рівності, подібності трикутників.
11. Теорема Піфагора, наслідки з теореми Піфагора.
12. Формули площ паралелограма, трикутника, трапеції.
13. Формула відстані між двома точками площини. Рівняння кола.
14. Ознаки паралельності прямої і площини.
15. Ознака паралельності площин.
16. Теорема про перпендикулярність прямої і площини.
17. Перпендикулярність двох площин.
18. Паралельність прямих і площин.
19. Перпендикулярність прямих і площин.

III. ОСНОВНІ ВМІННЯ І НАВИЧКИ

Вступник повинен уміти:

1. Виконувати арифметичні дії над натуральними числами, десятковими і звичайними дробами, користуватися калькулятором і таблицями для проведення обчислень.
2. Виконувати тотожні перетворення многочленів, алгебраїчних дробів, виразів, що містять степеневі, показникові, логарифмічні і тригонометричні функції.
3. Будувати графіки лінійної, квадратичної, степеневої, показникової, логарифмічної та тригонометричних функцій.
4. Розв'язувати рівняння і нерівності першого та другого степеня, а також рівняння і нерівності, що зводяться до них; розв'язувати системи рівнянь та нерівностей першого і другого степеня і ті, що зводяться до них; найпростіші рівняння і нерівності що мають степеневі, показникові, логарифмічні та тригонометричні функції.
5. Розв'язувати задачі на складання рівнянь і систем рівнянь.
6. Зображати геометричні фігури на площині і виконувати найпростіші побудови на площині.
7. Використовувати відомості з геометрії при розв'язуванні алгебраїчних задач, а методи алгебри і тригонометрії – при розв'язуванні геометричних задач.
8. Виконувати на площині операції над векторами (додавання і віднімання векторів, множення вектора на число) і використовувати їх при розв'язуванні практичних задач.
9. Застосовувати похідну при дослідженні функцій на зростання (спадання), на екстремуми і для побудови графіків функцій.
10. Застосовувати інтеграл для знаходження площі фігур, обмежених нескладними графіками.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Алексеев В.М.* Элементарная математика. Решение задач. – К.:Вища шк., 1989.
2. *Вишенський В.А., Перестюк М.О.* Конкурсні задачі з математики. – К.: Вища шк., 2001.
3. *Вишенський В.А., Перестюк М.О., Самойленко А.М.* Збірник задач з математики. Посібник для вступників до вузів. – К.: ТВІМС, 2000.
4. *Горделадзе Ш.Г., Кухарчук М.М., Яремчук Ф.П.* Збірник конкурсних задач з математики. – К.: Вища шк., 1988.
5. *Зайцев В.В., Рыжов В.В., Сканави М.И.* Элементарная математика. – М.: Наука, 1987.
6. *Збірник* задач з математики для вступників до ВТУЗів. /За ред. М.І. Сканаві. – К.: Вища шк., 1996.

Навчальне видання

ЛОМОНОС Людмила Миколаївна
МУРАНОВА Наталія Петрівна

МАТЕМАТИКА

Зразки білетів
для проведення співбесіди із вступниками
в Інституті доуніверситетської підготовки

Посібник

Технічний редактор *А.І. Лавринович*

Підп. до друку 06.07.05. Формат 60х84/16. Папір офс.
Офс. друк. Ум. фарбовідб. 13. Ум. друк. арк. 2,79. Обл.-вид. арк. 3,0.
Тираж 300 прим. Замовлення № 170-1. Вид. № 17/IV.

Видавництво НАУ
03680. Київ-680, проспект Космонавта Комарова, 1

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 977 від 05.07.2002