

МЕТАМОРФОЗЫ ФРАКТАЛЬНОГО ДЕРЕВА: ОТ «РАЙСКИХ КУЩЕЙ» ДО ХИМЕР СОБОРА ПАРИЖСКОЙ БОГОМАТЕРИ

*Национальный авиационный университет
Харьковский государственный университет питания и торговли*

В статье приведены изображения фрактального дерева, построенные при изменении угла расхождения ветвей от 0° до 180° . Рассмотрено приложение фрактальных деревьев к медицинской диагностике.

Постановка проблемы. Рост многоклеточных организмов основывается на делении материнской клетки на две дочерние клетки, структура которых подобна структуре материнской клетки [1]. С другой стороны, рост дерева также представляет собой последовательное деление ствола на две подобные друг другу ветви. Следовательно, дерево можно рассматривать как графическую модель многоклеточного организма, и закономерности, выявленные при изучении роста деревьев, можно распространить на закономерности, которым подчиняется рост многоклеточных организмов.

Это значит, что исследование того, как угол расхождения ветвей дерева от его ствола и соотношение между длинами ствола и ветвей влияют на форму фрактального дерева, является актуальной задачей прикладной геометрии.

Анализ последних достижений. Фрактальные деревья рассматриваются во многих работах отечественных и зарубежных авторов [2–4]. Однако в некоторых работах допускаются утверждения, не подкрепленные какими-либо доказательствами. Например, в работе [4, с. 222] утверждается, что «...размерность D варьируется между 1 и 2, причем для каждого D угол θ принимает наименьшее возможное без самокасаний значение». Вместе с тем в работе [5] доказана теорема 1, согласно которой фрактальная размерность D не зависит от угла расхождения ветвей θ и определяется соотношением между длиной ствола и длиной ветвей. Кроме того, ни один автор не полюбопытствовал, какие превращения претерпевает фрактальное дерево, если угол расхождения ветвей изменяется в интервале $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$.

Цель статьи. Таким образом, целью статьи является исследование зависимости формы фрактального дерева от угла расхождения его ветвей θ при их последовательных бифуркациях.

Формы фрактальных деревьев. Рассмотрим деревья, у которых соотношение между длиной ствола h и длинами ветвей h_1, h_2 является постоянным на каждом шаге бифуркации и равным $\lambda = \frac{h_1}{h} = \frac{h_2}{h} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Покажем на рис. 1 формы фрактальных деревьев, полученные при условии, что угол расхождения ветвей изменяется в интервале $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$. Размеры изображений составляют 66% от размеров первоначальных изображений.

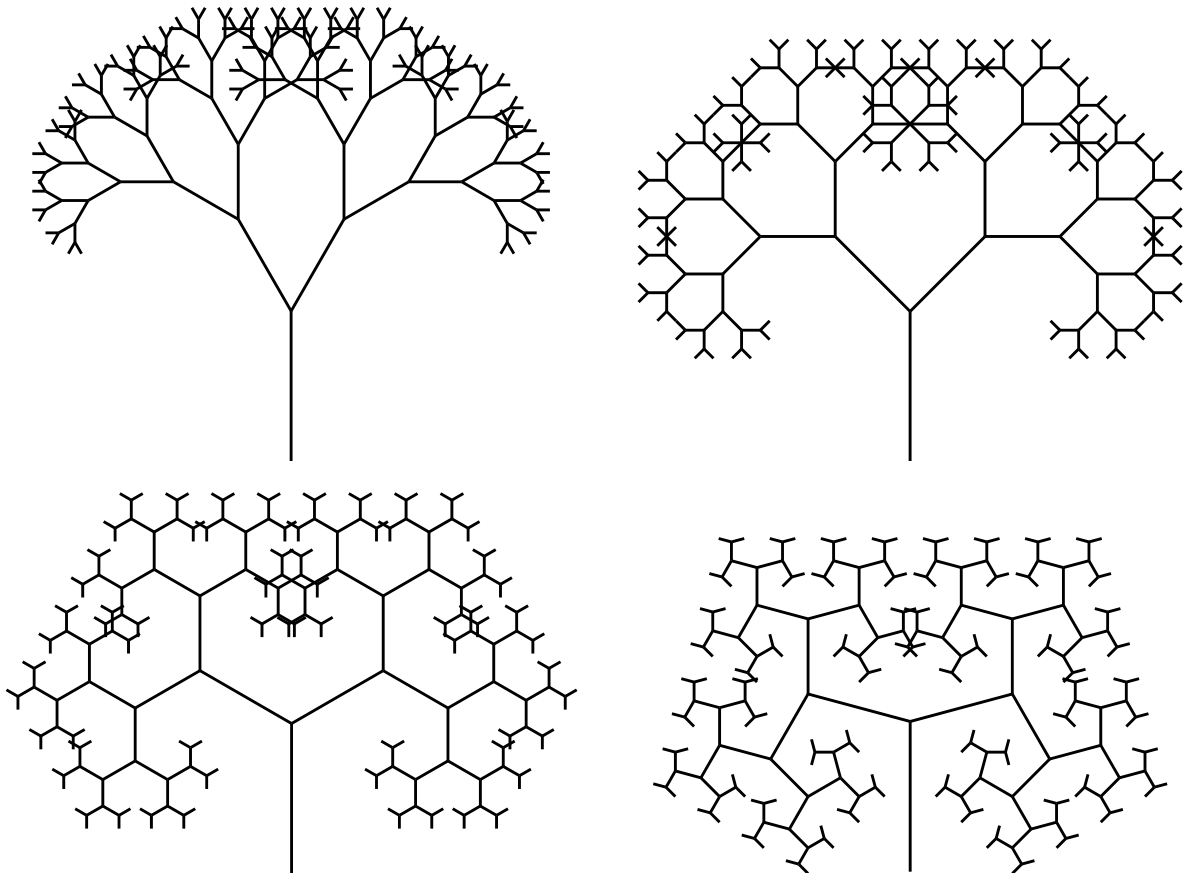


Рис. 1. Формы фрактальных деревьев, полученные при углах расхождения ветвей под $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$

На рис. 1 видно, как с уменьшением угла расхождения ветвей фрактальное дерево постепенно принимает образ обыкновенного растения. Впрочем, если дать волю воображению, то во фрактальном дереве, построенном при углах расхождения ветвей под 30° и меньше, можно увидеть библейское Древо познания.

Покажем на рис. 2 формы фрактальных деревьев, полученные при условии, что угол расхождения ветвей изменяется в интервале $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$. Размеры изображений составляют 100% от размеров первоначальных изображений.

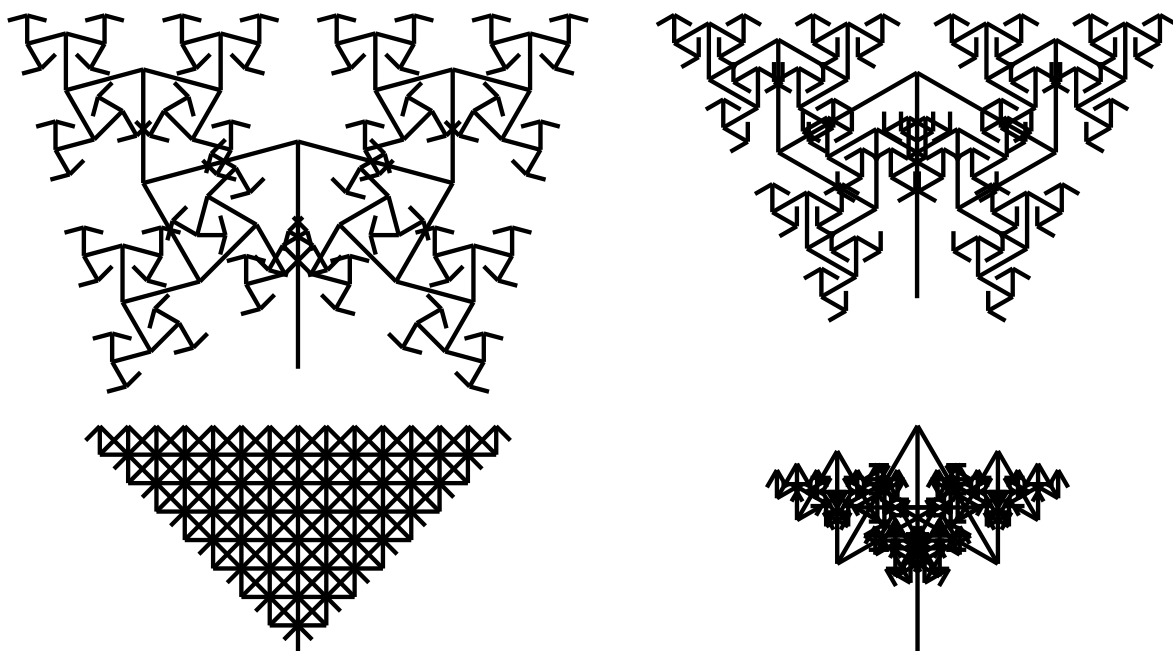


Рис. 2. Формы фрактальных деревьев, полученные при углах расхождения ветвей под 105° , 120° , 135° , 150°

Заметим, что наиболее выразительная форма фрактального дерева получается при угле расхождения ветвей под 115° и, на наш взгляд, с разительной ясностью напоминает одну из химер, притаившихся в основаниях башен собора Парижской Богоматери [6]. Покажем эту «химеру» на рис. 3. Размеры изображения составляют 166% от размеров первоначального изображения. Похоже, не правда ли?

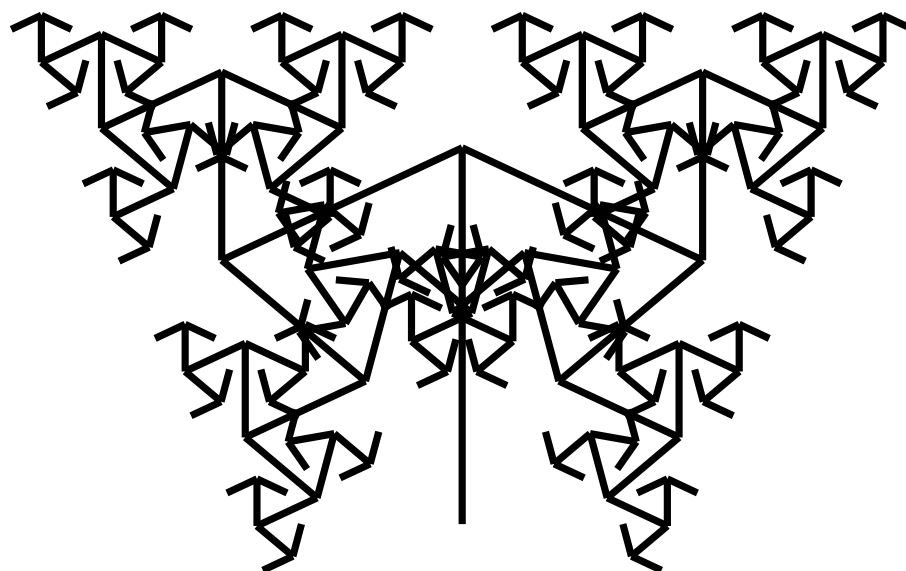


Рис. 3. Форма фрактального дерева, полученная при угле расхождения ветвей под 115°

Как показывают рис. 1 и рис. 2, при постоянном соотношении между длиной ствола и длинами ветвей кроны фрактальных деревьев, построен-

ных при углах расхождения ветвей, отличающихся от 90° , имеют самопересечения. Чтобы при данном угле расхождения ветвей избежать самопересечения кроны, необходимо уменьшить их длину за счет уменьшения соотношения между длиной ствола и длинами ветвей. Как следует из теоремы 1, доказанной в работе [5], с уменьшением соотношения между длинами ствола и ветвей фрактального дерева его фрактальная размерность уменьшается. Следовательно, фрактальная размерность деревьев, кроны которых не имеют самопересечения, заключается в интервале $1 \leq D \leq 2$ при изменении угла расхождения ветвей в интервале $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ и принимает наибольшее значение $D = 2$ при угле расхождения ветвей $\theta = 90^\circ$. Это объясняется тем, что, если соотношение между длиной ствола h и длинами ветвей h_1, h_2 подчиняется условию $h_1 = h_2 = \frac{h}{\sqrt{2}}$, крона фрактального дерева не имеет самопересечения при одном значении угла расхождения ветвей, равном $\theta = 90^\circ$.

Рассмотрим, какое практическое приложение может иметь представление о том, что фрактальное дерево является графической моделью многоклеточного организма. Предположим, что микроорганизмы, проникающие в клетку, изменяют параметры, которые управляют ее делением. Пусть деление клеток осуществляется без самопересечений. Следовательно, фрактальная размерность множества клеток, зараженных микроорганизмами, будет отличаться от фрактальной размерности множества здоровых клеток.

Это значит, что определение фрактальной размерности множества клеток можно положить в основу диагностики заболеваний, одним из проявлений которых является аномальное деление клеток, например, некоторых видов онкологических заболеваний.

Выводы. Таким образом, в статье изложены результаты исследования формы фрактального дерева при изменении угла расхождения его ветвей в интервале $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$. Показано, какие противоположные образы в сознании человека вызывают виды фрактального дерева, построенного при разных углах расхождения его ветвей. Кроме того, показана возможность применения фрактальной размерности фрактального дерева для медицинской диагностики и, в частности, для выявления образований, являющихся результатом аномального деления клеток, например, некоторых видов раковых опухолей.

Литература:

1. Биология : справочные материалы / [ред. Д. И. Трайтак]. – М. : Просвещение, 1988. – 208 с.

2. Пайтген Х. О. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем / Х. О. Пайтген, П. Х. Рихтер. – М. : Мир, 1993. – 176 с.

3. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая / М. Шредер. – Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая механика», 2001. – 528 с.

4. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы / Б. Мандельброт. – М. : Институт компьютерных исследований, 2002. – 656 с.

5. Ковальов Ю. М. Геометрія дерева бронхів у легенях людини / Ю. М. Ковальов, Д. О. Ніцин // Праці Таврійського держ. агротехнолог. ун-ту. – Мелітополь : ТДАТУ, 2011. – Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Т. 51. – С. 55-63.

6. Всеобщая история искусств : в 6 т. / Академия художеств СССР. Институт теории и истории изобразительных искусств. – М. : Государств. изд-во «Искусство», 1956. – . – Т. 2 : Искусство средних веков ; кн. 1 / [Под общей ред. Б. В. Веймарна и Ю. Д. Колпинского]. – 1960. – 508 с.

МЕТАМОРФОЗИ ФРАКТАЛЬНОГО ДЕРЕВА: ВІД «РАЙСЬКИХ КУЩЕЙ» ДО ХИМЕР СОБОРУ ПАРИЗЬКОЇ БОГОМАТЕРІ **Ковальов Ю.М., Ніцин Д.О.**

У статті наведено зображення фрактального дерева, побудовані при зміні кута розбіжності гілок від 0° до 180° . Розглянуто застосування фрактальних дерев до медичної діагностики.

METAMORPHOSES OF FRACTAL TREE: FROM «PARADISIAL GARDEN» TO CHIMERAS OF CATHEDRAL OF PARISIAN MOTHER OF GOD

Y. Kovalyov, D. Nitsyn

The images of fractal tree are resulted in the article, divergences of branches built at the change of corner from 0° to 180° . The appendix of fractal trees is considered to medical diagnostics.